HKBL 2020-2021

Devoir maison n°7

Pour le 20 Janvier

Traiter au choix l'un des exercices suivants :

Exercice 1 :

Soient les ensembles suivants :

$$F = Vect\big((1,0,-1),(0,-1,1),(-1,1,0)\big)$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x - y - z = 0\}$$

$$H = \{(a,a,a), a \in \mathbb{R}\}$$

$$J = Vect\big((0,2,2),(0,-1,-1)\big)$$

1. Montrer que F, G, H et J sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer pour chacun de ces espaces une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ (en donner une base et la dimension).

Exercice 2 :

Résoudre le système suivant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rrrl} -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = -1 \\ -x_1 & +(m-2)x_2 & -3x_3 & = -m-3 \\ 2x_1 & +(2m+2)x_2 & +(m-1)x_3 & = -2m-1 \end{array} \right.$$

Corrigé du devoir maison n°7

Exercice 1 :

1) F et J sont des sous espaces vectoriels engendrés par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc ce sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ils sont contenus dans $\mathbb{R}^3$, ils sont non vides et ils sont stables par combinaisons linéaires).

Pour déterminer une base de F vérifions si la famille qui engendre F est libre. On cherche s'il existe des réels a, b, c non tous nuls tels que $a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0\\ -b+c=0\\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c\\ b=c\\ a=b \end{cases}$$

Il semble que $a=b=c=1$ conviennent, en effet : $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi F = Vect($\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$). Les deux vecteurs qui engendrent F sont clairement non colinéaires (on le voit par exemple à la position des 0) donc ils forment une base de F et ainsi dim(F)=2. F est un plan vectoriel.

On remarque que J = Vect((0 ;-1 ;-1)) car les vecteurs qui engendrent J sont colinéaires.
Ainsi dim(J) = 1. J est une droite vectorielle.

H = Vect ((1 ; 1 ; 1)) est aussi un sous espace vectoriel engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur (1 ;1 ;1) étant non nul on a dim(H) = 1. H est une droite vectorielle.

G = {$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \, z = 2x - y$} = Vect($\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$). Les deux vecteurs qui engendrent G sont clairement non colinéaires (on le voit par exemple à la position des 0) donc ils forment une base de G et ainsi dim(G)=2. G est un plan vectoriel.

Remarques :

A) on peut aussi vérifier que

- G$\subset \mathbb{R}^3$;
- Le vecteur nul appartient à G donc G n'est pas vide.
- Si $u(x\,;y\,;z)$ et $v(x'\,;y'\,;z')$ appartiennent à G et si $\propto$ est un réel alors $\propto u + v \in G$ en effet les coordonnées de $\propto u + v$ $sont$ $(\propto x + x'; \propto y + y'; \propto z + z')$ et 2($\propto x + x') - (\propto y + y')$+$\propto z + z'$ = $\propto (2x - y + z) + 2x' - y' + z' = \propto\times 0 + 0 = 0$

B) L'équation cartésienne vérifiée par les coordonnées des vecteurs de G est celle d'un hyperplan.

2) Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe a et b des réels tels que u = $a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}a\\-b\\-a+b\end{pmatrix}$ et

$$2a - (-b) - (-a+b) = 0 \Leftrightarrow 3a = 0$$

Ainsi u =$\begin{pmatrix}0\\-b\\b\end{pmatrix}$ $et \;\; F \cap G = Vect(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix})$. C'est une droite vectorielle de dimension 1.

Exercice 2 :

1. Soit $(A|B)$ la matrice augmentée associée au système. On a

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow -L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & m-2 & -3 & -m-3 \\ 2 & 2m+2 & m-1 & -2m-1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \\ 0 & 2m-2 & m-3 & -2m-3 \end{array}\right)$$

Soit

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3-2L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \\ 0 & -2 & m+1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & m+1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \end{array}\right)$$

On obtient :

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & m & -2 & -m-2 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-mL_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2+m\frac{m+1}{2} & -\frac{m}{2}-2 \end{array}\right)$$

Et finalement :

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & m^2+m-4 & -m-4 \end{array}\right)$$

On a un polynôme de degré 2, ces deux racines sont $m_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Si $m \notin \{m_-, m_+\}$, alors le système est de Cramer et admet une seule solution:

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-(m+2)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+\frac{m+1}{2}L_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3m^2+8m}{m^2+m-4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2m^2+6m}{2m^2+2m-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{array}\right)$$

Donc $(S) \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3m^2+8m}{m^2+m-4} \\ x_2 = -\frac{2m^2+6m}{2m^2+2m-8} \\ x_3 = \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{cases}$.

Sinon, le système est incompatible car -m-4 n'est pas nul ainsi le système n'a pas de solution .