

DL et contre-exemples

- Une fonction est continue si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 0.
- Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1.
- Au delà de l'ordre 2, on ne peut rien conclure sur la régularité de f .

Voici par exemple une fonction qui admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = o(x^2)$$

f a donc bien un $DL_2(0)$ puisque $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

En particulier f admet un $DL_0(0)$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

De même f admet un $DL_1(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Pourtant } \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) &= 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \times \frac{-2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'existe pas ainsi $f'(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 donc pas dérivable : $f''(0)$ n'existe pas alors que f a un $DL_2(0)$!

- On peut intégrer un DL mais on ne peut pas le dériver. Voici une fonction qui admet un $DL_1(0)$ dont la dérivée n'admet pas de $DL_0(0)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; g(x) = 1 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :

$$x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = o(x) \text{ ainsi } g \text{ admet un } DL_1(0) \text{ puisque } g(x) = 1 + o(x)$$

Pourtant $\forall x \in \mathbb{R}^*; g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0 donc g' n'admet pas de $DL_0(0)$.

Remarque : La fonction f précédemment choisie donne aussi un contre-exemple pour justifier qu'on ne peut pas dériver un DL. On peut aussi considérer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction h est dérivable en 0 car elle admet $DL_1(0)$: $h(x) = o(x)$, pourtant sa dérivée n'est pas continue en 0, h' n'a donc pas de $DL_0(0)$.