*Le devoir comporte six exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.*

*Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.*

*Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.*

---

# Exercice 1

Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le système

$$(S)\ :\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & & & = & 0\\ x & + & ay & + & z & = & 0\\ & & y & + & az & = & 0\end{array}\right.$$

*On s'attachera à proposer pour chaque ensemble de solutions une écriture sous forme de Vect.*

# Exercice 2

*(Questions indépendantes)*

1. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 = y^2\}$.
   $E$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ?
2. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) = 3\}$.
   $G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ ?
3. Soit $H$ l'ensemble des suites (réelles) géométriques. $H$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble $S$ des suites réelles ?
4. Soit $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$. Montrer que $J$ est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.
5. Soit $K = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(0) = P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que $K$ est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

# Exercice 3

On considère l'équation $(E)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, donnée par :

$$(E) \qquad (\overline{z})^2 - 2z + 1 = 0$$

1. Soit $z$ une solution de $(E)$. Démontrer que $z$ est aussi solution de l'équation :
   $$(E') \qquad z^2 - 2(\overline{z}) + 1 = 0$$
   et en déduire que $z$ est solution de l'équation :
   $$(E'') \qquad z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = 0$$
2. Déterminer la division euclidienne de :
   $$X^4 + 2X^2 - 8X + 5 \qquad \text{par} \qquad (X-1)^2$$
3. En déduire les solutions de $(E'')$.
4. Déterminer alors les solutions de $(E)$.

# Exercice 4

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 2$.
On suppose que $P$ admet $n$ racines <u>réelles</u> distinctes, appelées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et rangées dans l'ordre strictement croissant :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

1. En utilisant le théorème de Rolle, démontrer que $P'$ admet au moins une racine $y_1$ telle que :
   $$x_1 < y_1 < x_2$$
2. Préciser le degré de $P'$. Combien de racines <u>réelles</u> $P'$ admet-il ?
3. On note :
   $$Q(X) = (P(X))^2 + 1$$
   (a) Justifier que si $Q$ admet une racine $\alpha$ dans $\mathbb{C}$, alors $\alpha$ ne peut pas être un réel.
   (b) Par l'absurde, montrer que toutes les racines (complexes) de $Q$ sont simples.

# Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.
L'objectif de cet exercice est de calculer le produit suivant :

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sin(a) \times \sin\left(a + \frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(a + \frac{(n-1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} = e^{ina}\ i^{n-1}.$$
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose :
$$b_k = e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} 2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$
Montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} b_k = i\ 2^n\ (-1)^{n+1}\ e^{ina}\ u_n.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^n = e^{2ina}$$
et en déduire en fonction des $b_k$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$$(z+1)^n = e^{2ina}.$$
4. Soit $P$ le polynôme défini par :
$$P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}.$$
Après avoir décomposé $P$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que :
$$\prod_{i=0}^{n-1} b_i = (-1)^n P(0),$$
puis que :
$$i\ 2^n\ (-1)^{n+1}\ e^{ina}\ u_n = (-1)^n (1 - e^{2ina}).$$
5. En déduire que :
$$u_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

# Exercice 6

Soit $p$ un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $f$ la fonction polynomiale définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.
Étudier les variations de $f$ et justifier que l'équation « $f(x) = 0$ » admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note $\lambda$.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$ et soit $P$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $a$ soit racine au moins double de $P$.
   (b) Montrer que le polynôme $X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$ admet $(2p+1)$ racines dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles et toutes simples, que l'on note $z_1, z_2, \ldots, z_{2p+1}$.
   Montrer que pour tout $k$ de $[\![1, 2p+1]\!]$, $|z_k| \geqslant \lambda$.
   *(On pourra calculer $f(|z_k|)$ et utiliser la question 1).*
3. On note :
$$E_1 = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite de complexes, } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+3} = -z_{n+2} + 2z_n\}$$
$$E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite de réels, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 2u_n\}$$
On admet que $E_1$ a une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $E_2$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Soit $P(X) = X^3 + X^2 - 2$. Montrer que $P$ admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées dont on déterminera le module et un argument.
   (b) Chercher tous les nombres complexes $q$ tels que la suite $(q^n)_{n\geqslant 0}$ soit dans $E_1$.
   (c) Montrer que si on note pour tout $n$, $z_n = x_n + iy_n$ avec $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$,
$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1 \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2 \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2$$
   (d) On pose pour tout entier naturel $n$ :
$$v_n = 1, \qquad w_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \qquad t_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$
   Vérifier que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $E_2$.
   (e) Justifier que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la suite $(av_n + bw_n + ct_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_2$.
   (f) On admet que si $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, alors il existe un unique $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$X = \alpha v_0 + \beta w_0 + \gamma t_0, \qquad Y = \alpha v_1 + \beta w_1 + \gamma t_1, \quad \text{et} \quad Z = \alpha v_2 + \beta w_2 + \gamma t_2$$
   Montrer alors que, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $E_2$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + b(w_n)_{n\in\mathbb{N}} + c(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$$