Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$ 3. $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t}}dt$ (avec $u=\sqrt{t}$)

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ (avec $x=(t-1)^2$)

Exercice 2

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$.

1. Calculer I_1 et I_2
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.
4. En déduire : $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n u_{n+1}$.

Exercice 3

Soit f la fonction qui au réel x associe $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$

1. Justifier que $D_f =]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer f'.
3. En déduire $f(x)$ pour tout réel x de D_f.

Exercice 4

On note pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$.

1. Montrer que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis vérifier que $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$ où g est une fonction à déterminer.
3. Etudier les variations et le signe de g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Justifier que pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{e^t+1} \leqslant 1$.
5. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.