Exercice 1

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$, et que $\alpha \in]1, 2[$.
2. A l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

« u_n existe et $u_n \geqslant 1$ »

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|$$