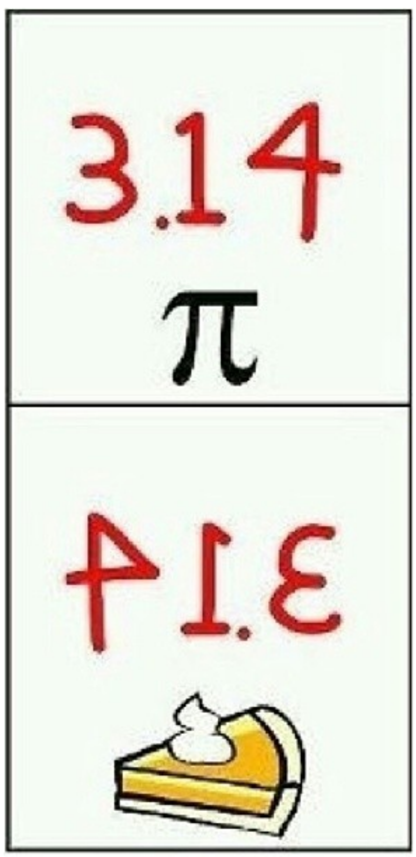
Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Lundi 06 Janvier 2014 - 08h-12h

L'épreuve comporte deux exercices et deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 4 pages dont celle-ci. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.



Les maths, c'est comme l'amour.
Une idée simple qui peut parfois se compliquer.

.

Exercice 1

On considère la fonction r, dont la variable est un nombre complexe z, définie par :

$$r(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}.$$

1. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique.
   (a) Exprimer $z + \overline{z} + 2|z|$ à l'aide de x et y. En déduire que $z + \overline{z} + 2|z|$ est un nombre réel.
   (b) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur x et y pour que $z + \overline{z} + 2|z| > 0$.
   (c) En déduire que l'ensemble de définition de r est $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $r(x)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on a $(r(z))^2 = z$. (*Indication :* $|z|^2 = z\overline{z}$.)
   (b) Démontrer que r est injective.
4. (a) Quel nom donneriez-vous à l'application r ?
   (b) Que sont les nombres $r(z)$ et $-r(z)$ pour le nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$?
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$.
   (d) Si vous deviez prolonger r en 0, quelle valeur donneriez-vous à $r(0)$?
   (e) Si vous deviez prolonger r à $\mathbb{C}$ tout entier, quelle valeur donneriez-vous à $r(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}^{*-}$?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. On considère l'équation :

$$1 + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} z^k\right) + z^n = 0 \qquad (E).$$

1. Montrer qu'un complexe z est solution de (E) si et seulement si il est solution de l'équation :

$$(*) \ : \quad \frac{(z+1)(z^n - 1)}{z - 1} = 0.$$

2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^k$.
2. Calculer $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \omega^k$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$.

Problème 1

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On pose, pour tout t pour lequel l'expression a un sens :

$$m(t) = \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{1/t}.$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de m. La fonction m est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble ?
   (b) Pour tout réel γ strictement positif, donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto e^{\gamma t}$.
   (c) En déduire que m admet en 0 un développement limité à l'ordre 1 de la forme :
   $$m(t) = \sqrt{ab} + \lambda\sqrt{ab}\big(\ln(a/b)\big)^2\ t + \underset{t\to 0}{o}(t),$$
   où λ est une constante réelle que l'on précisera.
   (d) En déduire que l'on peut prolonger m par continuité en 0. Préciser la valeur de $m(0)$.
   (e) La fonction m (prolongée) est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $m'(0)$?
2. (a) En remarquant que, $a^t = \underset{t\to+\infty}{o}\big(b^t\big)$, déterminer la limite en $+\infty$ de m.
   (b) En procédant de même, déterminer la limite de m en $-\infty$.
3. Soient α, β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$ et $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui est concave sur $[\alpha, \beta]$. On introduit la fonction :
   $$\tau : \begin{array}{ccc}]\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \end{array}.$$
   (a) Soit $x \in]\alpha, \beta]$. Justifier que :
   $$\tau'(x) = \frac{f'(x)}{x-\alpha} - \frac{f(x) - f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}.$$
   (b) En déduire, à l'aide du Théorème des Accroissements Finis, que pour tout $x \in]\alpha, \beta]$, il existe un $c \in]\alpha, x[$ tel que :
   $$\tau'(x) = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - \alpha}.$$
   (c) Quel est le signe de $\tau'(x)$ pour $x \in]\alpha, \beta]$? Qu'en déduire pour τ ?
   (d) A l'aide d'une comparaison de $\tau\big((\alpha+\beta)/2\big)$ et $\tau(\beta)$, démontrer que :
   $$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leqslant f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$
   (e) Soient t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t_1 < t_2$. Démontrer que $f : x \mapsto x^{t_1/t_2}$ est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :
   $$\frac{a^{t_1} + b^{t_1}}{2} \leqslant \left(\frac{a^{t_2} + b^{t_2}}{2}\right)^{t_1/t_2}.$$
   (f) En déduire que m est croissante sur $[0, +\infty[$.
   On admettra qu'un raisonnement très similaire permet de démontrer que m est également croissante sur $]-\infty, 0]$.
4. Représenter l'allure du graphe de m lorsque $a = 1$ et $b = 4$.

Problème 2

On considère la fonction :

$$f(x) = xe^x - e^x - 1.$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f.
   (b) Etudier le sens de variations de f.
   (c) Etudier la convexité de f. Préciser l'existence éventuelle de point(s) d'inflexion et déterminer, s'il y a lieu, le développement limité à l'ordre 1 de f en ce(s) point(s) d'inflexion.
   (d) Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet une unique solution dans D_f, notée λ.
   Justifier que $\lambda \in]0, 1[$ et montrer que $f(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda}$.
   (e) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions dans D_f, notées a et b avec $a < \lambda < b$. Justifier que $a \in [-2, -1]$.
   (f) Montrer que $b = -a$.
   (g) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
2. (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [-2, -1]$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - a|$.
   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{e^n}$.
3. Représenter le graphe de la fonction f. On indiquera la position des points fixes de f et la(les) tangente(s) au(x) point(s) d'inflexion.
4. On souhaite déterminer toutes les droites T qui sont tangentes à la fois à la courbe $\mathcal{E}$ de l'exponentielle et à la courbe $\mathcal{L}$ du logarithme.
   (a) Montrer qu'une droite T est tangente à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ respectivement aux points d'abscisses α et β si et seulement si le système suivant est satisfait :

$$\mathcal{S} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = 1/\beta \\ (1-\alpha)e^\alpha = -1 + \ln(\beta) \end{cases}$$

   (b) Montrer que

$$\mathcal{S} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = 1/\beta \\ f(\alpha) = \alpha \end{cases}$$

   (c) En déduire le nombre de droites qui répondent à notre problème et préciser une équation pour chaque d'elles (en fonction du nombre a introduit)
   (d) Représenter $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ et les différentes possibilités pour T.