Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x+1)\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **Étude de la fonction f**
   (a) Justifier que la fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et donner une interprétation graphique de ces limites pour la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.
   (d) Justifier que f est dérivable en 0, déterminer $f'(0)$, l'équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.
   (e) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer l'expression de sa dérivée.
   (f) Montrer que f est une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
   (g) Représenter sur un même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
2. **Une suite implicite**
   (a) Justifier l'existence d'une unique suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = n.$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
   (c) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n + 1.$$
      i. Montrer que $v_n \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}$.
      ii. En déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
      iii. Vérifier que $n\ln(n)v_n = 2(1-v_n) + nv_n\ln(nv_n)$, puis en déduire un équivalent de v_n. Montrer que :
      $$u_n = -1 + \frac{2}{n\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).$$
3. **Une fonction définie par une intégrale**
   (a) Justifier qu'on peut bien définir une fonction F sur $]0,+\infty[$ par :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = \int_0^{1/x} f(t)dt.$$
   (b) Montrer que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer l'expression de sa dérivée.
   (c) Montrer que
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{x}.$$
   En déduire la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$
   (d) Soit x un réel élément de $]0,1[$. Montrer que :
   $$\int_1^{1/x} f(t)dt \geqslant \frac{1-x}{x(\ln(x+1)-\ln(x))}.$$
   En déduire la limite de F lorsque x tend vers 0.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n, et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
2. Montrer que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Ker}(f-Id)$ et $\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f-Id)$.
4. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $g(P)$ par :
$$g(P) = ((X-1)P)' = (X-1)P'(X) + P(X).$$
   (a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que $\text{Ker}(g) = \{0\}$ et en déduire que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Écrire la matrice A de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que g est diagonalisable.
2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit une fonction $f(P)$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)dt & \text{si } x \neq 1, \\ P(1) & \text{si } x = 1. \end{cases}$$
   (a) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et tout réel x, montrer qu'on a : $f(g(P))(x) = P(x)$.
   (b) Montrer que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Écrire la matrice B de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que f est diagonalisable.
3. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne par Q_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$$Q_k(X) = (X-1)^k.$$
   (a) Montrer que :
$$X^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Q_j(X),$$
   et
$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ Q_j(X) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i.$$
   (b) Montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer $f(Q_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   (d) Retrouver le fait que f soit diagonalisable.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$
Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, et on note M la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit MX_n. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer l'image du vecteur $(0, 1, 2)$ par f.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie :
$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   et que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ aient respectivement pour première coordonnée 1, 1 et 0.
   (c) Déterminer pour tout entier naturel n l'expression de T^n.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
5. (a) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.