Le devoir comporte cinq exercices et deux problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Exercice 1

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que i est une racine de P. En déduire sans calcul une autre racine de P.
2. Déterminer les factorisations de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (dans l'ordre de votre choix).

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2$.

1. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, déterminer une nouvelle expression de S.
2. En déduire la valeur de $2S$, puis celle de S.

Exercice 3

Montrer que $\forall n \geqslant 3, \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{3}$.

Exercice 4

Au loto sportif, le parieur remplit une grille dans laquelle il indique ses prévisions pour treize matchs de football à venir. Pour chacun des matchs, il peut cocher au choix trois cases : $\boxed{1}$ pour une victoire de l'équipe qui reçoit, $\boxed{2}$ pour une victoire de l'équipe qui se déplace et $\boxed{N}$ pour un match nul. A l'issue de chaque match, une et une seule de ces trois possibilités sera réalisée.
On pourra donner les résultats sans calculer leur valeur.

1. De combien de façons un parieur peut-il remplir la grille ?
2. Dénombrer les grilles pour lesquelles à l'issue des matchs :
   (a) toutes les réponses sont exactes.
   (b) toutes les réponses sont fausses.
   (c) exactement trois réponses sont exactes.
3. Pour gagner, il faut avoir coché au moins dix réponses exactes. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

Exercice 5

Pour fêter l'arrivée des vacances de Toussaint (enfin !), les 27 filles et les 14 garçons de l'hypokhâgne 813 du lycée du Parc ont décidé de monter une pièce de théâtre caricaturant une grande partie de leurs professeurs. Il y a donc :

- 2 rôles féminins (ceux de Mme Degrémont et Mme Navarro)
- 6 rôles masculins (ceux de Mr Bonneville, Mr Gelineau, Mr Pascaud, Mr Pélissier, Mr Raut, Mr Saint-Etienne).

En plus de ces 8 rôles, la pièce comporte un chœur de 6 personnes (garçons ou filles) pour chanter les louanges de cette formidable équipe pédagogique.

Combien y a-t-il de distributions possibles des rôles ?
On pourra donner le résultat sans calculer sa valeur.

Problème 1

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(*) : \qquad z^3 - 6z + 4 = 0$$

1. (a) On pose $\omega = -2 + 2i$. Mettre ω sous forme trigonométrique.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \omega$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.
   (c) On rappelle que j désigne le nombre complexe égal à $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que les solutions de l'équation $z^3 = \omega$ sont $1+i$, $(1+i)j$ et $(1+i)j^2$.
   (d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
2. Soit un complexe z_0 solution de $(*)$, i.e. tel que $z_0^3 = 6z_0 - 4$
   Soient u et v deux complexes tels que $u + v = z_0$ et $uv = 2$.
   (a) Calculer u^3v^3 et $u^3 + v^3$.
   (b) En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré : $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
   (c) Déterminer les valeurs possibles de u et v.
   (d) En déduire les solutions de l'équation $(*)$.

Problème 2

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$ fixé. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_p par :

$$Q_p(X) = \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (X - i)$$

   Préciser le degré, le coefficient dominant et les racines de Q_p.

   On peut donc écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q_p(X) = \sum_{i=0}^{p} a_{p,i} x^i$, où les $a_{p,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont des réels (dépendants de p). On ne demande pas de calculer ces coefficients explicitement. On pourra utiliser ces notations dans la suite du problème si on en a parfois besoin.

2. Montrer que pour tous $p, k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant p$, $Q_p(k) = \dbinom{k}{p}$.
3. Montrer que pour tous $p, k \in \mathbb{N}$ avec $k < p$, $Q_p(k) = 0$.
4. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![p, n]\!], \quad \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$$

5. Pour $p \in [\![0, n-1]\!]$, on note $T_p = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \dbinom{n}{k}\dbinom{k}{p}$.

   Montrer que :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \qquad T_p = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 0$$

6. On note pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

   Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\mathcal{P}(p)$: "$S_p = 0$".
   (a) Montrer que $T_0 = S_0$. En déduire que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   (b) Soit $p \in [\![0, n-2]\!]$. Montrer que $T_{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} a_{p+1,i} S_i$.
   (c) Soit $p \in [\![0, n-2]\!]$ fixé. On suppose avoir déjà démontré que $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour tout $i \in [\![0, p]\!]$. Déduire de la question précédente qu'on a $S_{p+1} = 0$ et donc que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie également.
   (d) Que peut-on conclure des questions (a),(b),(c) ?

$* * *$ *Fin du sujet* $* * *$