Devoir surveillé n°4

Exceptionnellement, les copies seront corrigées, évaluées mais la note ne sera pas prise en compte. Vous pouvez faire des raisonnements clairs et complets ou vous contenter de donner la méthode, l'idée pour gagner du temps. Si vous rédigez votre copie comme au concours, prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre un travail propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : ANALYSE : Fonctions définies par une intégrale

Partie A : Étude d'un premier exemple

On considère la fonction g : $[0;1] \to \mathbb{R}$

$t \to \sin(\pi t)e^{-\pi t}$

1) Donner le tableau de variation complet de g (on rappelle que pour tout réel x, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$).
2) Montrer que pour tout couple (v, u) dans $[0\,;1]^2$,
$$|g(v) - g(u)| \leq 2\pi|v - u|$$
3) A l'aide d'une double intégration par parties (IPP), calculer
$$\int_0^1 g(t)dt.$$
4) Retrouver ce résultat en considérant que
$$g(t) = Im(e^{\pi(i-1)t})$$

Partie B : Étude d'un deuxième exemple

Pour tout réel x, on pose $\phi(x) = \int_0^1 \sin(xt)\, dt$

1) Justifier que pour tout réel $x \neq 0$, $\phi(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$.
2) Calculer $\phi(0)$ et justifier que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.
3) a) Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout réel $x \neq 0$, $\phi'(x) = \frac{x\sin(x)-1+\cos(x)}{x^2}$.
   b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de ϕ au voisinage de 0. En déduire que ϕ est dérivable en 0 et déterminer $\phi'(0)$.
   c) Vérifier que ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
4) a) Calculer pour tout entier naturel non nul k; $\phi(2k\pi)$.
   b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; ϕ' s'annule au moins une fois sur $]2k\pi; 2(k+1)\pi[$.

Partie C : Généralisons pour aller plus loin

On considère une fonction f, C^1 sur [0 ;1] et la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\psi(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\, dt$

1) Justifier que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Quelle est la parité de ψ? Justifier.
3) Identifier la fonction f et la valeur de la variable x qui ont été choisies dans la question 3 de la partie A.
4) Quelle fonction f a été choisie dans la partie B ?
5) a) Justifier que $C = max_{[0\,;1]}|f'(t)|$ existe.
   b) Montrer avec une IPP que pour tout réel $x > 0$,
$$|\psi(x)| \leq \frac{|f(1)| + |f(0)| + C}{x}$$
   c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} \psi(x)$.
6) a) Justifier que M= $max_{[0;1]}|f(t)|$ existe.
   b) Rappeler pourquoi pour tous réels u et v,
$$|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u - v|.$$
   c) Montrer alors que pour tous réels x et y,
$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \frac{M}{2}|x - y|.$$

Exercice 1 : PROBABILITES

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Pour toute variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant la condition

$$(\text{H}) : \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) > 0$$

on appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = P_{X\geq n}(X = n)$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,
$$x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$$
2. On considère dans cette question une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p $\in]0;1[$. Déterminer le taux de panne associé à cette variable aléatoire.
3. On suppose dans cette question que la loi de Z est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P(Z=n)=$\frac{1}{n(n+1)}$
   a) Déterminer les réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n}$$
   b) Vérifier que la série de terme général P(Z=n) est convergente de somme 1.
   c) Justifier que la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.
   d) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, vérifier que P(Z≥n)=$\frac{1}{n}$.
   e) En déduire le taux de panne associé à Z.

Partie B

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne qui contient k boules blanches numérotées de 1 à k et k boules noires identiques car non numérotées. On tire simultanément k boules de l'urne.

Pour tout $1 \leq n \leq k$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule qui porte le numéro n est sortie et 0 sinon.

1) Dénombrer le nombre de tirages possibles et vérifier que pour tout $1 \leq n \leq k$; P($X_n = 1) = \frac{1}{2}$.
2) Reconnaître la loi de X_n; rappeler son espérance et sa variance.
3) Montrer que pour tout couple d'entiers (i; j) $\in [1;k]^2$, on a : P($X_i = 1 \cap X_j = 1) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$. Reconnaître la loi de X_iX_j.
   En déduire que Cov(X_i; X_j) = $\frac{-1}{4(2n-1)}$
4) On pose X=$\sum_{n=1}^{k} X_n$. Calculer E(X) et V(X).
5) On note Y le nombre de points obtenus en ajoutant les numéros de toutes les boules blanches. On a donc
   $$Y= \sum_{n=1}^{k} nX_n.$$
   Calculer l'espérance de Y.

Exercice 2 : ALGEBRE

1) Pour n un entier naturel non nul, on considère l'application Tr : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à toute matrice M=$(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$carrée de taille n associe sa trace c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux : Tr(M)= $\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
   a) Justifier que Tr est une application linéaire.
   b) Justifier qu'elle est surjective mais pas bijective (pour cela il suffit, pour tout réel a, de déterminer au moins 2 antécédents de a par Tr).
   c) En déduire la dimension de son noyau.

2) Dans cette question, pour n un entier naturel au moins égal à 2, on considère $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par
   $$\varphi(M) = M - Tr(M)I_n$$
   a) Justifier que φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que φ est injectif puis surjectif.
   c) Montrer que l'ensemble E={M $\in M_n(\mathbb{R})$ / φ(M)= M} est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

3) Dans cette question, pour n un entier naturel non nul, on considère A $\in M_n(\mathbb{R})$ telle que Tr(A)$\neq 0$ et l'application $\psi: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par
   $$\psi(M) = Tr(A)M - Tr(M)A$$
   a) Justifier que ψ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que Ker(ψ) $= Vect(A)$.
   c) En déduire le rang de ψ puis justifier que Im(ψ) $= Ker(Tr)$.

Exercice 3 : SERIE HARMONIQUE

Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1) a) Dresser le tableau complet (avec les limites) de variations de f, en justifiant chaque élément.

b) Donner, au voisinage de +∞, les deux premiers termes du développement asymptotique de $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Même question pour $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \frac{-1}{2}$ (on utilisera $\frac{x^2}{1+x} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$)

On a donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2x^2}$

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

2) a) Déterminer un équivalent de $u_n - u_{n+1}$ au voisinage de +∞.

b) En considérant la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est la constante d'Euler notée γ.

c) Montrer que pour tout entier $k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est positive et majorée par 1.

e) Que peut-on en déduire sur γ?