Devoir surveillé n°2

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On considère le sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u,v,w) où u = (1,3,-1,0) ; v = (5,4,-2,1) et w = (-13,5,1,-4).

1. a) Justifier que la famille (u,v) est libre.
   b) Montrer que w peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et v.
   c) En déduire une base et la dimension de F.
2. On considère le sous espace vectoriel G engendré par x = (1,3,0,0) et y= (6,7,-3,2).
   a) Justifier que (u,v,x,y) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b) Décomposer le vecteur w dans cette base.
3. Soit H le sous espace vectoriel défini par H={(a,b,c,d) ∈ $\mathbb{R}^4$/ 3a-b+7d= 0 et a+b+4c-2d=0}
   a) Déterminer une base de H.
   b) Montrer que u ∈ H et que v ∉ H. En déduire une base de $F \cap H$.
   c) Quelle est la dimension de F+H ? En donner une base, en justifiant.

Exercice 2 : Calculs matriciels

Soient A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = A+$I_3$ et C = A−3I_3

1. Calculer B, C et BC. Justifier que B et C commutent.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 2$,
   $$B^k = 4^{k-1}B \text{ .}$$
   Pour la suite on admet que $\forall\, k \geq 2, C^k = (-4)^{k-1}C$
3. a) Montrer, pour tout n≥ 1,que $A^n = \frac{(-1)^{n-1}}{4}C + \frac{3^n}{4}B$.
   b) Cette formule est-elle vraie pour n=0 ?
4. a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   b) Vérifier que la formule obtenue à la question 3.a) reste vraie pour n=-1.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   Résoudre, en discutant suivant les valeurs du paramètre λ, l'équation AX=λX.

Exercice 3 : Supplémentaires communs

Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère deux sous espaces vectoriels distincts A et B. Le but de cet exercice est de construire un supplémentaire commun à A et B dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire de trouver un sous espace vectoriel S de $\mathbb{R}^n$, tel que :

$$A \oplus S = B \oplus S = \mathbb{R}^n.$$

1. Dans cette question on suppose qu'un tel sous espace vectoriel S existe. Justifier que dim (A) = dim (B).
2. On s'intéresse dans cette question au cas où A et B sont des hyperplans de $\mathbb{R}^n$.
   a) Justifier qu'il existe u ∈ A et v ∈ B tels que u ∉ B et v ∉ A.
   b) Montrer que w=u+$v \notin AUB$.
   c) Vérifier que S = Vect(w) convient.
   d) <u>Étude d'un exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ x = 2y\right\}$ et $B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer S, un supplémentaire commun à A et B puis décomposer tout vecteur u = (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dans A⊕S.

Problème :

Les parties B et C sont indépendantes entre elles mais il est nécessaire d'avoir bien traité la partie A pour pouvoir les aborder.

On considère dans tout l'exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^x-1}{x} > 0$.
2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que f est C^1 sur]-∞; 0[et sur]0 ;+∞[puis vérifier que $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$ pour tout réel $x \neq 0$.
   b) Étudier les variations de la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$
   c) En déduire le signe de $g(x)$.
   d) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   e) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   f) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
   g) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution réelle que l'on notera α.
   De même on notera β l'unique réel tel que $f(\beta) = -1$.
4) a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) - x = f(-x)$.
   b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+{}^*$.

Partie B : Étude d'une primitive de f

Pour tout réel x on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) Justifier que F est bien définie.
2) a) Soit α le nombre réel défini dans la partie A.
   Justifier que pour tout réel $x > \alpha$, $\int_\alpha^x f(t)dt \geq x - \alpha$.
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
   b) Déterminer de même $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.
   c) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3) a) Pour tout réel x, calculez $F(x) + F(-x)$.
   b) F est-elle paire ? Impaire ?
   c) En déduire la parité de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$ et tracer sa courbe dans un repère.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

1) Justifier que la suite (I_n) est croissante.
2) a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1)$$

   c) Montrer alors que pour tout entier n≥ 2, on a :

$$ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e^k - 1)}{(n-1)!}\right) \leq I_n \leq ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(e^k - 1)}{n!}\right)$$

BONUS : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 > 0 \ et \ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier n.
2) Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
3) Justifier alors que la suite (u_n) est convergente.