Devoir surveillé n°1

Durée : 3h

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Pour s'échauffer

Cet exercice est un QCM. Il y a une seule bonne réponse par question. Le détail des calculs est attendu.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$. Alors l'équation de la tangente en $x=0$ est :	❒ $y=2x-3$ ❒ $y=3x-2$ ❒ $y=3x^2-6x+3$ ❒ $y=-2$
2. Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$. Alors l'équation de la tangente en $x=1$ est :	❒ $y=x+1$ ❒ $y=-x+1$ ❒ $y=x+2$ ❒ $y=-x+2$
3. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x-1}{4-x}$. Alors $f'(x)=\dots$:	❒ $\frac{-4x+9}{(4-x)^2}$ ❒ $\frac{7}{(4-x)^2}$ ❒ $\frac{2x-1}{(4-x)^2}$ ❒ $\frac{9}{(4-x)^2}$

4. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$. Alors $f'(x)=\dots$:	❒ $\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{2x}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{-x}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-4x+3)^4$. Alors $f'(x)=\dots$:	❒ $(8x-16)(x^2-4x+3)^3$ ❒ $4(x^2-4x+3)^3$ ❒ $4(2x-4)^3$ ❒ $(2x-4)(x^2-4x+3)^4$

Exercice 2 : *Suites usuelles*

Partie A : *Question de cours (extrait d'un sujet d'ULM)*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 1$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$

Soit $l = \frac{b}{1-a}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - l$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1, v_{n+1} = av_n$.
2) En déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = \frac{b}{1-a}(1-a^{n-1}) + a^{n-1}u_1$$
3) **BONUS :** A quelle condition nécessaire et suffisante la suite (u_n) est-elle convergente ? Quelle est alors sa limite ?

Partie B : *Application*

On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = -5 \\ u_3 = 13 \\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\geq1}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

1) Montrer que $v_1 = 3$. Calculer v_2.

2) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$v_{n+2} = 2\, v_{n+1} - v_n$$

3) a) Montrer par récurrence double que $(v_n)_{n\geq1}$ est constante.

b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

c) Quel genre de suite reconnaissez-vous ? Exprimer u_n en fonction de n.

d) **BONUS :** La suite (u_n) est-elle convergente ?

e) Pour tout entier naturel non nul, calculer
$$\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Exercice 3 : *Calculs de sommes*

***Partie A** : Une somme usuelle*

Soit n un entier naturel et

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

On propose de démontrer de 2 façons différentes que,

$$D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) Établir ce résultat par récurrence sur n.

2) a) Justifier que pour n≥ 1,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{l=1}^{n} l(l-1)^2$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1)$$

c) Retrouver l'expression de D_n en fonction de n. On pourra utiliser sans le démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

***Partie B :** Somme géométrique dérivée (ou presque)*

Soit n un entier naturel non nul, q un réel et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$$

1) a) Calculer S_3 lorsque q = 2. La formule ★ est-elle vérifiée ?

b) Que vaut S_n pour q = 1 ?

On propose de démontrer de 3 façons différentes que,

★ $S_n = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$ si $q \neq 1$

2) a) Soit q un réel distinct de 1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1-q)S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1}$$

b) En déduire le résultat attendu.

3) a) Pour n un entier non nul fixé, quelle est la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$?

b) Même question pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$$

c) Exprimer S_n en fonction de g' et f.

d) Établir alors le résultat attendu.

4) a) Justifier que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} q^k$$

b) **BONUS :** Retrouver que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} q^k$$

c) En reconnaissant une somme usuelle, retrouver le résultat annoncé.

Exercice 4 : *Résolution d'équations et d'inéquations*

1) Étudier le signe de x^2+3x+2 sur $\mathbb{R}$.
2) Compléter le tableau en annexe pour donner l'expression de $|x+1|+|x^2+3x+2|$ en fonction de x.
3) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$|x+1|+|x^2+3x+2|>1$$
4) En déduire l'ensemble de définition de la fonction définie par $h(x)=\ln\left(-1+|x+1|+|x^2+3x+2|\right)$

Si vous vous ennuyez :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f: x \mapsto \sqrt{x^2-1}$
2. $g: x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$
3. $h: x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$
4. $u: x \mapsto \ln(e^{-x}-1)$
5. $v: x \mapsto \sqrt{e^{x+1}-e^{\frac{1}{x}}}$

ANNEXE de l'exercice 4

NOM : ....

x	$-\infty$ $\qquad -2$	$\qquad -1$	$\qquad +\infty$
$\lvert x+1\rvert$			
$\lvert x^2+3x+2\rvert$			
$\lvert x+1\rvert+\lvert x^2+3x+2\rvert$			