Groupe P

FICHE CHAP 8 : Déterminer une base d'un SEV

Méthode 1

1/ Transformer l'écriture du SEV sous la forme : Vect ((u), (v))
Ainsi (u ; v) est une famille génératrice

2/ Montrer que (u, v) est une famille libre

- soit résoudre un système pour montrer que la seule combinaison linéaire nulle de u et v est triviale.
- soit, si la famille comprend 2 vecteurs u et v ; u et v sont non colinéaires, alors (u, v) est libre.

Exemple 1

Soit G un SEV de $\mathbb{R}^3$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = z\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$ ⇒ On a donc une famille génératrice de G

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on pose : $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ⇒ La famille génératrice de G est libre puisque la seule combinaison linéaire nulle est triviale

3/ Si les conditions sont réunies : déterminer une base ((u), (v)) du SEV

Exemple : ici, une base de G est : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Méthode 2

Si on a la dimension d du SEV, on peut montrer :

- qu'une famille est libre & génératrice (cf Méthode 1)
- qu'une famille est libre et de cardinal d
- qu'une famille est génératrice du SEV et de cardinal d.

$\Rightarrow$ Une telle famille est une base du SEV

Exemple du point 2 : Q1) ex n° 20 du TD

$((1,0,-2,5),(7,-4,3,1)(0,1,-1,0)(1,-3,0,2))$ dans $\mathbb{R}^4$

On sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$

La famille comporte 4 éléments, elle est donc de cardinal 4

Soient a, b, c, d tels que :

$$a(1,0,-2,5) + b(7,-4,3,1) + c(0,1,-1,0) + d(1,-3,0,2) = 0$$

Alors : $\begin{cases} a + 7b + d = 0 \\ -4b + c - 3d = 0 \\ -2a + 3b - c = 0 \\ 5a + b + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

Donc la famille est libre et de cardinal 4 dans $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.