Déterminer une base d'un Sous-espace Vectoriel

- Fiche méthode

→ Définir une base d'un SEV, c'est trouver une famille libre et génératrice de celui-ci.

ou bien une famille optimale et génératrice / ou libre.

Méthode 1 : Avec une équation cartésienne.

↳ Écrire sous la forme $F = \text{Vect}((\dots);(\dots))$

1) Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0 \right\}$

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = -y-z \right\}$ Exprimer un paramètre en fonction des 2 autres

$F = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ Remplacer

$F = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{avec } z, y \in \mathbb{R} \right\}$ "Extraire" les coordonnées du vecteur.

$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Écrire sous forme de famille génératrice.

2) Vérifier la liberté des vecteurs en résolvant un système ou par colinéarité (lorsqu'il y en a 2)

Ici, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont clairement non colinéaires (à cause des 0)

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F.

→ On a trouvé une décomposition unique de tous les vecteurs de la famille.

• Méthode 2 : Avec une famille génératrice (Vect(....))

→ Montrer que la famille n'est pas liée, ou bien enlever ceux qui sont combinaison linéaire des autres.

Méthode :

Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel

1. Ecrire le sev sous forme de sous espace vectoriel engendré ($A = \text{vect}(u, v, \ldots)$).

Exemple : Soit A un sous-espace vectoriel tel que :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2x = y \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Vérifier que la famille génératrice est libre

Si on reprend notre exemple, cette famille génératrice de A est composée d'un seul vecteur non nul, donc la famille est forcément libre.

Ainsi $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de A.