1 Démonstration par récurrence

Axiome

Définition :
Un axiome est une propriété admise.

Soit $P(n)$ une propriété relative à un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$.
On peut affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, si les deux étapes suivantes sont vérifiées :

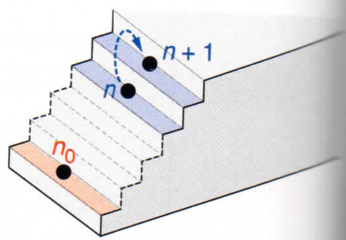
- $P(n_0)$ est vraie (la propriété est initialisée au rang n_0)
- si, pour un entier $m \geqslant n_0$, on suppose que $P(m)$ est vraie (**hypothèse de récurrence**), alors $P(m+1)$ est également vraie (la propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0).

Remarques

- On peut illustrer le principe de récurrence à l'aide de l'image d'un escalier.

Si l'on peut :
- accéder à une **marche n_0** de l'escalier (initialisation),
- monter sur une marche à partir de la précédente,

alors on peut accéder à toute marche au-dessus de n_0.



Important :
Les deux étapes sont indispensables.

- En général, l'**étape d'initialisation** est une simple vérification qui ne pose pas de problème mais elle est indispensable. En effet, une propriété peut être héréditaire, mais fausse.

Exemple : La propriété « 2^n est un multiple de 3 » est évidemment fausse et pourtant elle est héréditaire : si 2^m est un multiple de 3, c'est-à-dire si $2^m = 3k$, avec k entier, alors $2^{m+1} = 2 \times 2^m = 2 \times 3k = 3(2k)$ est aussi un multiple de 3.

Remarque :
Un raisonnement par récurrence est-il judicieux pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2n^2 - 5n + 6 > 0$?

- On peut penser à utiliser un raisonnement par récurrence lorsque l'on doit démontrer une propriété concernant les entiers naturels, en particulier pour établir des propriétés de suites définies par récurrence.

Exemple : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

On montre, par récurrence, que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant 1$.

- **Initialisation :** $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_1 \leqslant 1$.
- **Caractère héréditaire :** On suppose, pour un entier $m \geqslant 1$, que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_m \leqslant 1$

et on montre que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_{m+1} \leqslant 1$. $u_{m+1} = f(u_m)$, f étant la fonction définie sur $I = [0\ ;\ +\infty[$

par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur I.

L'hypothèse de récurrence $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_m \leqslant 1$ donne, en appliquant le fait que la fonction f est croissante sur l'intervalle I, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant u_{m+1} \leqslant f(1)$. Or, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(1) = 1$; donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_{m+1} \leqslant 1$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant 1$.

2 Comportement global d'une suite

2.1. Sens de variation

Définitions

Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 si :
pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir du rang n_0 si :
pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > u_n$.

Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 si :
pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite (u_0) est **strictement décroissante** à partir du rang n_0 si :
pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} < u_n$.

Une suite est **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante à partir de son premier terme.

Une suite est **constante** si tous ses termes sont égaux.

Remarque :
(u_n) est croissante à partir de $n = 3$ signifie que :
$u_3 \leqslant u_4 \leqslant u_5 \leqslant \ldots$

Vocabulaire :
(u_n) est **stationnaire** s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$u_{n+1} = u_n$.
Une suite constante est donc une suite stationnaire à partir de son premier terme.

Cas particulier

Pour une suite définie par $u_n = f(n)$, où la fonction f est croissante (ou décroissante) sur $[n_0\,;+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante (ou décroissante) à partir du rang n_0.

La réciproque est fausse. Par exemple, pour $f(x) = x\cos(2\pi x)$.

La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est croissante, car $f(n) = n$, alors que f n'est pas monotone sur $[0\,;+\infty[$:

en effet, $f(3) = 3$, $f(3{,}5) = -3{,}5$ et $f(4) = 4$.

2.2. Suite majorée, minorée ou bornée

Définitions

- Une suite (u_n) est **majorée**, s'il existe un réel M tel que :
pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant \boldsymbol{M}$.
- Une suite (u_n) est **minorée**, s'il existe un réel m tel que :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \boldsymbol{m}$.
- Une suite est **bornée**, si elle est à la fois majorée **et** minorée.

Vocabulaire :
- M est un **majorant** de (u_n).
- m est un **minorant** de (u_n).

Remarques

- Tout réel M' supérieur à M est aussi un majorant de la suite (u_n).
De même, tout réel m' inférieur à m est un minorant de (u_n).
- Une suite croissante est minorée par son premier terme et une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemple : Soit $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Comme $n \in \mathbb{N}$, alors $2n^2+1$ et n^2+3 sont positifs ; donc $u_n \geqslant 0$.

$$u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+3} - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-6}{n^2+3} = \frac{-5}{n^2+3} \leqslant 0 \text{ ; donc } u_n \leqslant 2.$$

On obtient $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. La suite (u_n) est donc bornée.

La calculatrice permet souvent de conjecturer l'existence d'un majorant ou d'un minorant.

Attention !
Une suite croissante peut être majorée.
Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

A. Rédiger une démonstration par récurrence

Méthode

- On identifie clairement la propriété $P(n)$ à démontrer et on établit les deux étapes.
- On exprime S_{m+1} en fonction de S_m pour utiliser l'hypothèse de récurrence.

Voir exercices 16 à 18

Énoncé : Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Résolution

On note : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$

et $P(n)$ la propriété :

$$« S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ».$$

- *Initialisation* $(n_0 = 1)$

$S_1 = 1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2 \times 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$, donc $P(1)$ est vraie.

- *Caractère héréditaire*

On suppose que, pour un entier $m \geqslant 1$, $P(m)$ est vraie et on montre que $P(m+1)$ est encore vraie.

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= S_m + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6} \end{aligned}$$

Or $\frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6}$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie.

On peut alors conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

B. Démontrer un résultat du cours

Méthode

On commence par écrire la propriété $P(m+1)$ pour bien voir ce qu'il faut démontrer.

Voir exercices 19 à 21

Énoncé : Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

Résolution : On note $P(n)$ la propriété à démontrer.

- *Initialisation* $(n_0 = 2)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$.

$\lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a$, donc f_2 est dérivable en a et $f'_2(a) = 2a$.

La propriété $P(2)$ est vraie.

- *Caractère héréditaire*

On suppose que, pour un entier $m \geqslant 2$, $P(m)$ est vraie et on montre que $P(m+1)$ est encore vraie.

$f_{m+1}(x) = x \times f_m(x)$, donc f_{m+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Avec la formule de dérivation d'un produit et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$f'_{m+1}(x) = 1 \times f_m(x) + x(mx^{m-1}) = x^m + mx^m = (m+1)x^m.$$

Donc la propriété $P(m+1)$ est vraie.

On peut alors conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

C. Étudier le sens de variation d'une suite

Méthode

• On peut appliquer directement les définitions en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Rappel
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

• Lorsque la suite est à termes **strictement positifs**, on peut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

Voir exercices 32 à 34

Énoncé : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n^2) - 2n$, pour $n \in \mathbb{N}$ et la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n!}{2^n}$, pour $n \geqslant 1$.

Résolution

• $u_{n+1} - u_n = \cos((n+1)^2) - 2(n+1) - \cos(n^2) + 2n$
$= \cos((n+1)^2) - \cos(n^2) - 2$.

Or, tout cosinus est compris entre – 1 et 1. D'où :

$$-1 \leqslant \cos((n+1)^2) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant -\cos(n^2) \leqslant 1.$$

Par somme d'inégalités, on obtient :

$$-1 - 1 - 2 \leqslant \cos((n+1)^2) - \cos(n^2) - 2 \leqslant 1 + 1 - 2.$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, $n!$ et 2^n sont strictement positifs, donc $v_n > 0$ pour $n \geqslant 1$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = \frac{n+1}{2}.$$

Or, si $n \geqslant 1$, alors $n + 1 \geqslant 2$; donc $\frac{n+1}{2} \geqslant 1$.

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$, donc $v_{n+1} \geqslant v_n$ et la suite (v_n) est donc croissante.

D. Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

Méthode

• Dans le cas d'une suite (u_n) donnée par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$, le tableau des variations de f et la limite de $f(x)$ en $+\infty$, permettent de préciser si la suite est bornée.

• Lorsqu'une suite est définie par une relation de récurrence, on conjecture que la suite est bornée, et on le démontre par un raisonnement par récurrence.

Voir exercices 35 à 38

Énoncé : Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{-2n^2+1}{n^2+4}$ par $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que cette suite est bornée.
Soit (v_n) définie par $v_n = 0$ et $v_{n+1} = 2\sqrt{v_n} + 1$.
Démontrer que (v_n) est bornée par 0 et 9.

Résolution : • Soit $f(x) = \frac{-2x^2+1}{x^2+4}$ définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Après calculs, $f'(x) = \frac{-18x}{(x^2+4)^2}$ qui est négatif sur $[0\ ;+\infty]$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+1}{x^2+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{4}.$$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{4}$ ↘	-2

La suite (u_n) est donc :
minorée – 2 et majorée par $\frac{1}{4}$.

• On considère la propriété $P(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 9$ ».

Comme $v_0 = 0$, alors $0 \leqslant v_0 \leqslant 9$, donc **$P(0)$ est vraie**.
On suppose que $P(m)$ est vraie, donc $0 \leqslant v_m \leqslant 9$.
Comme la fonction *racine carrée* est croissante sur $[0\ ;+\infty[$, alors :

$$0 \leqslant \sqrt{v_m} \leqslant 3\ ; \quad \text{donc} \quad 1 \leqslant 2\sqrt{v_m} + 1 \leqslant 7.$$

Ainsi, $v_{m+1} \in [1\ ;7] \subset [0\ ;9]$, donc $P(m+1)$ est vraie.
On a donc montré que, pour tout entier n, $0 \leqslant v_n \leqslant 9$.
La suite (v_n) est donc bornée.

1. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

1. Connaître le cours

VRAI-FAUX.
Justifier la réponse.

12 Pour tout entier $n \geqslant 2$, $n^2 \geqslant 2^n$.

13 La propriété $P(n)$: $7^n + 1$ est un multiple de 7, est héréditaire à partir de $n = 1$.

14 Si une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier na… rel n, alors elle est héréditaire.

15 Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et hé… ditaire à partir de $n = 1$, alors elle est vraie pour … entier naturel n.

2. Applications directes

Rédiger une démonstration par récurrence
Application A, page 167

16 Pour démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$

est constante égale à 1, Émilie a rédigé la solution suivante :

« Par hypothèse, on a $u_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Je suppose que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 1$ (hypothèse de récurrence) ;

alors, on en déduit, $u_{n+1} = 4u_n - 3 = 4 \times 1 - 3 = 1$.

Ainsi, la propriété est également vraie au rang $n+1$.

En conclusion, la propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, on en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = 1$. »

La copie d'Émilie est-elle satisfaisante ?

17 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel … a $u_n = 3 - 2^n$.

18 Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'e… $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Démontrer un résultat du cours
Application B, page 167

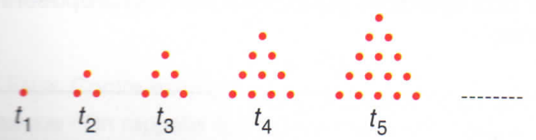
19 (u_n) est une suite arithmétique de premier te… et de raison r.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 …$

20 (u_n) est une suite géométrique de premier te… et de raison q.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times …$

21 Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout entier natu…
$$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

3. Exercices d'entraînement

22 On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, le n-ième nombre triangulaire par $t_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.



Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

23 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1$.

À l'aide de la touche (ANS) de la calculatrice, conjecturer une propriété de la suite (u_n), puis démontrer cette propriété par récurrence.

24 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 7 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 10u_n - 18.$$

À l'aide de la calculatrice, conjecturer une expression de u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$, et démontrer par récurrence cette conjecture.

25 On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = a$, avec $a \in [-1\,;+\infty[$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n).

Indication : On discutera selon $a \in [-1\,;+\infty[$ pour comparer u_0 et u_1.

2. COMPORTEMENT GLOBAL D'UNE SUITE

1. Connaître le cours

VRAI-FAUX.
Justifier la réponse.

26 Si f est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

27 Si la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$, alors f est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

28 Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (u_n) définie par $u_0 = k$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

29 Si la suite (u_n) est croissante, alors elle n'est pas majorée.

30 Si la suite définie par $u_n = f(n)$ est bornée, alors f est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

31 Si, à partir d'un rang n_0, on a $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et si les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors la suite (w_n) est également convergente.

2. Applications directes

Étudier le sens de variation d'une suite
Application C, page 169

32 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

a) $u_n = n^2 + 4n + 3$; b) $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$;

c) $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$; d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$.

33 Soit (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^2}$.

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

34 On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer, par un raisonnement par récurrence, la proposition $P(n)$:

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

On utilisera le sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée
Application D, page 169

Rappel : Pour tout réel x et tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1\ ;$$
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1\ ;$$
$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1\,.$$

35 Démontrer que chacune des suites (u_n) est minorée, mais non bornée :

a) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}+1}$; b) $u_n = \dfrac{n^2+\cos n}{n+1}$.

36 Dans chacun des cas suivants, on définit la suite (u_n) pour $n \geqslant 1$; préciser si cette suite est bornée :

1° a) $u_n = n^2+n-2$; b) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$; c) $u_n = \dfrac{1}{n}$.

2° a) $u_n = \ln(n)$; b) $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$; c) $u_n = \mathrm{e}^{n^2}$.

37 Même exercice.

a) $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; b) $u_n = \dfrac{3-\sin n}{2}$;

c) $u_n = \dfrac{2+(\sin n)^2}{4}$.

38 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs et étudier son sens de variation.

En déduire que la suite (u_n) est bornée et en préciser un majorant et un minorant.

3. Exercices d'entraînement

Pour les exercices **39** *à* **41**, étudier le sens de variation de la suite (u_n) et préciser si elle est majorée, minorée, bornée (la suite est définie sur $\mathbb{N}$).

39 a) $u_n = \dfrac{4n+1+2^n}{5}$; b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

40 a) $u_n = n+(-1)^n$; b) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

41 a) $u_n = \dfrac{-5}{3^n}$; b) $u_n = \dfrac{(-5)^n}{3}$.

42 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = x^n(2\ln x-1)$.

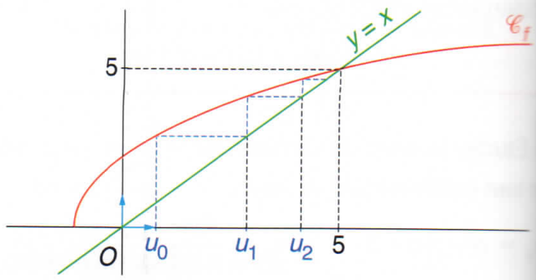
1° Déterminer la fonction dérivée f_n'.
Démontrer qu'elle s'annule une seule fois sur $]0\,;+\infty[$ en un réel a_n que l'on précisera.

2° Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :
$$1 \leqslant a_n < \sqrt{\mathrm{e}}\ .$$

3° Étudier les variations de la suite (a_n) .

4° Préciser le comportement de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

43 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5}\ .$$



1° À l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .

2° Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3° Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.