CHAPITRE 15

Intégration sur un segment

15.1 Primitives d'une fonction

15.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est **une primitive de f sur I** si :

- F est dérivable sur I
- $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Exemples :

E 1 – La fonction sin est une primitive de la fonction cos sur $\mathbb{R}$

E 2 – La fonction $x \mapsto \sin(x) + 2$ est également une primitive de la fonction cos sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors les primitives de f (si elles existent) diffèrent d'une constante.
Plus précisément, si F_0 est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est :

$$\{x \mapsto F_0(x) + k,\ k \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit F_0 une primitive de f.
Notons E l'ensemble de toutes les primitives de f. On veut montrer que :

$$E = \{x \mapsto F_0(x) + k,\ k \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $G : x \mapsto F_0(x) + k$. La fonction G est alors déja bien dérivable sur I par somme de fonctions dérivables sur I.
De plus, $\forall x \in I,\ G'(x) = F_0'(x) + 0 = f(x)$.
Ainsi, on a bien $G \in E$.

$\boxed{\subset}$ Soit $F \in E$: F est dérivable sur I et $F' = f$.
Posons alors $\forall x \in I,\ \varphi(x) = F(x) - F_0(x)$.
Par somme de fonctions dérivables, φ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \varphi'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
On en déduit que φ est constante sur I :

$$\exists k \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ \varphi(x) = k \Longrightarrow F(x) = F_0(x) + k$$

et ainsi, $F \in \{x \mapsto F_0(x) + k,\ k \in \mathbb{R}\}$.

Remarque :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant au moins une primitive. Soit $x_0 \in I$. Alors il existe une et une seule primitive de f qui s'annule en x_0.

15.1.2 Primitives et continuité

Théorème 3 ***Théorème fondamental de l'analyse***

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet au moins une primitive définie sur I.

Remarque :

Soit f une fonction continue sur I. Alors toute primitive de f sera dérivable et sa dérivée sera continue, donc toute primitive de f sera de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exemple :

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle admet une primitive sur $\mathbb{R}^*$ qui est :

$$\boxed{x \longmapsto \ln(|x|)}$$

(attention à bien penser à la valeur absolue).

Vérifions-le. Posons pour tout $x \neq 0, F(x) = \ln(|x|)$.
La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par composition, F est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus,

$$\forall x > 0,\ F(x) = \ln(|x|) = \ln(x) \Longrightarrow \forall x > 0,\ F'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\forall x < 0,\ F(x) = \ln(|x|) = \ln(-x) \Longrightarrow \forall x < 0,\ F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

15.1.3 Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)\ (+k \in \mathbb{R})$	Domaine de validité
1	x	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n < 0, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{ax},\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,(x)$	$]-1,1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arccos}\,(x)$	$]-1,1[$

15.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

15.2.1 Définition

Définition 4

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et soit F une primitive quelconque de f. On appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** le réel défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque :

La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive F choisie. Si on avait choisi une autre primitive G de f, on sait que $G = F + k$, donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Exemples :

E 1 – Si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

E 2 – $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$

E 3 – $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int_0^{\pi/4}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \Big[x - \text{Arctan}(x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

15.2.2 Fonction de la borne supérieure

Proposition 5

Soit I un intervalle et soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I. Alors la fonction φ :

$$\varphi : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, c'est exactement ***la primitive de f qui s'annule en a****. De plus*

$$\forall x \in I,\ \varphi'(x) = f(x)$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue sur I, donc elle admet au moins une primitive F sur I (qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a alors :

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \int_a^x f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

Ainsi, φ apparaît directement comme une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (somme de $x \mapsto F(x)$, et de $x \mapsto -F(a)$ fonction constante). Donc φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a : $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = F'(x) = f(x)$.

Exemples :

E 1 – La fonction **logarithme népérien** est par définition l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. On a donc :

$$\forall x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

E 2 – La fonction **Arctangente** est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

Proposition 6

Soit f une fonction continue sur I.
Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle J et à valeurs dans I. Alors le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$ est inclus dans I. On note :

$$\forall x \in J,\ g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

- *Si u et v sont continues sur J, alors g est continue sur J*
- *Si u et v sont dérivables sur J, alors g est dérivable sur J et*

$$\forall x \in J,\ g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue sur I, donc elle admet au moins une primitive F sur I (qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a alors :

$$\forall x \in J,\ g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x))) - F(u(x))$$

Donc par composition, on en déduit directement, selon les propriétés de u et v, les propriétés de la fonction g. En particulier, si u et v sont dérivables, g l'est également et

$$\forall x \in J,\ g'(x) = (F \circ v)'(x) - (F \circ u)'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Exemple :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\ln(x)} \sin(e^t)dt$. La fonction F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

La fonction $g : t \mapsto \sin(e^t)$ est continue (par composition) sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x)} \sin(e^t)dt = \Big[G(t)\Big]_{x^2}^{\ln(x)} = G(\ln(x)) - G(x^2)$$

F est donc une somme de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de plus :

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \frac{1}{x}G'(\ln(x)) - 2xG'(x^2) = \frac{1}{x}g(\ln(x)) - 2xg(x^2) = \frac{1}{x}\sin(x) - 2x\sin(e^{x^2})$$

15.2.3 Propriétés de somme

Proposition 7 ***Linéarité de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Alors pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b f(t)dt$$

Proposition 8 ***Relation de Chasles***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tous $a,b,c\in I$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque :

On a $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Définition 9

On dit qu'une fonction f définie sur $[a,b]$ est **continue par morceaux sur** $[a,b]$ si f est une fonction continue sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $a_1,\dots,a_p$, en lesquels la fonction admet des limites finies à gauche et à droite.

Proposition 10

On ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant les valeurs de f sur un nombre fini de points. Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est donc intégrable sur $[a,b]$. Si $a_0=a$, a_1, …, $a_p=b$ désignent les points de discontinuité de f. On a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt$$

où f_k est le prolongement continu de $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ à $[a_k,a_{k+1}]$.

15.2.4 Intégration par parties

Théorème 11 ***Intégration par parties***

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration :

On sait que $(uv)'=u'v+uv'$, donc $u'v=(uv)'-uv'$. Ainsi :
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

15.2.5 Changements de variables

Théorème 12

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans I. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I. Alors la fonction $t \mapsto F(\varphi(t))$ est une primitive de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
On a donc : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \Big[F(u)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Exemple :

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx$ à l'aide d'un changement de variable $u = \sin(x)$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ et on a : $\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow u = 0, \\ x = \pi/2 \Leftrightarrow u = 1, \\ \forall x \in [0,\pi/2], \varphi'(x) = -\cos(x) \end{cases}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)dx &= -\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,(-\cos(x)dx) \\ &= -\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^2(x)\,(-\cos(x)dx) \\ &= -\int_0^{\pi/2} (1-(\varphi(x))^2)(\varphi(x))^2\,\big(\varphi'(x)dx\big) \\ &= -\int_0^1 (1-u^2)u^2du = -\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15} \end{aligned}$$

Proposition 13

Soit $a \geqslant 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a,a]$.

- *Si f est une fonction paire, alors :*

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt = 2\int_{-a}^0 f(t)dt$$

- *Si f est une fonction impaire, alors :*

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^a f(t)dt = -\int_{-a}^0 f(t)dt$$

Proposition 14

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui est T-périodique. Alors :

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

15.2.6 Intégrales et inégalités

Proposition 15 ***Positivité de l'intégrale***

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur $[a, b]$ avec $a < b$.

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

Proposition 16 ***Fonction positive et continue***

- *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.*
  Si $f \geqslant 0$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.
- *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.*
  Si $f \geqslant 0$ et si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Proposition 17 ***Comparaisons de fonctions***

Soient f et g deux fonctions continues (par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Proposition 18 ***Inégalité de la moyenne***

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur $[a, b]$ telle qu'il existe deux réels m et M vérifiant :

$$\forall x \in [a, b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Proposition 19 ***Intégrale et valeur absolue***

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur $[a, b]$ avec $a < b$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt \leqslant (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

15.3 Sommes de Riemann

Proposition 20 ***Lien entre intégrale et aire***

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$.
Alors l'aire (en unités d'aires) comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Définition 21

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).
On partage cet intervalle $[a,b]$ en n segments de longueur identique, à savoir de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.
On génère ainsi une **subdivision** $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ avec :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Remarque :

On a $x_0 = a$ et $x_n = b$

Théorème 22 ***Sommes de Riemann***

Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad = \quad \int_a^b f(t)dt}$$

et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad = \quad \int_a^b f(t)dt}$$

Remarques :

- **R 1** – Pour appliquer la formule des sommes de Riemann, il faut déterminer le nombre de rectangles (le nombre de termes dans la somme), les valeurs de a et b et l'expression de la fonction f (continue sur $[a,b]$).
- **R 2** – Cas particuliers importants : si $[a,b] = [0,1]$, alors si f est une fonction continue sur $[0,1]$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt}$$

Exemple :

Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

On a : que $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

On reconnaît donc une Somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière de $[0,1]$ en n segments. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, on en déduit que

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$