

Nombres complexes

3.1 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes

3.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté \mathbb{C} , l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme

$$a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

où i est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est alors unique :

- le réel a s'appelle la **partie réelle de z** , notée $a = \operatorname{Re}(z)$.
- le réel b s'appelle la **partie imaginaire de z** , notée $b = \operatorname{Im}(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire.

Remarques :

R1 – Cette représentation sous la forme $a + ib$ d'un nombre complexe s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

R2 – Les nombres réels sont des nombres complexes qui ont une partie imaginaire nulle.

R3 – Les nombres complexes de la forme ib sont eux appelés des **imaginaires purs**.

R4 – On peut agir sur les nombres complexes comme sur les réels : les règles de développement et de factorisation sont encore vraies, il faut juste utiliser que $i^2 = -1$.

R5 – On peut additionner deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

R6 – On peut aussi multiplier deux nombres complexes :

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

3.1.2 Conjugué

Définition 2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **nombre complexe conjugué de z** le complexe, noté \bar{z} défini par $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a - ib$ deux nombres complexes. Alors

1. $z\bar{z} = a^2 + b^2$: c'est un réel positif.
2. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
3. $\overline{\bar{z}} = z$
4. z est un nombre réel $\iff z = \bar{z}$
5. z est un imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$
6. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
7. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

Remarque :

On peut aussi définir l'inverse d'un nombre complexe en s'aidant du conjugué :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

3.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, on appelle **module de z** le réel positif noté $|z|$ défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 5

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$
4. $|zz'| = |z||z'|$

Théorème 6*Inégalité triangulaire*

Pour tous nombres complexes z et z' dans \mathbb{C} , on a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + \bar{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| \\ &= (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

D'où en passant à la racine carrée des deux côtés, on a bien l'inégalité voulue.

3.1.4 Exponentielle exponentielle**Définition 7**

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle \mathcal{C} de rayon 1 et de centre 0. Ce cercle correspond à l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

On repère chaque point de \mathcal{C} par un angle $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (angle avec l'axe horizontal). Ce point a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ainsi pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} / z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

On dit que θ est un **argument** du nombre complexe z .

Remarques :

- R1** – Si on a un nombre complexe quelconque z non nul, on peut donc lui définir un argument, qui sera celui de $\frac{z}{|z|}$.
- R2** – Un nombre complexe z (non nul) est donc complètement défini par son module $\rho = |z|$ et un de ses arguments θ .

Définition 8

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe égal à

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Si $z = a + ib$, on peut noter plus généralement l'exponentielle du nombre complexe z par

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

Remarques :

R1 – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$$

R2 – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

R3 – $|e^{i\theta}| = 1$

R4 – $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Théorème 9*Formule de Moivre*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

autrement dit

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Théorème 10*Formules d'Euler*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.1.5 Forme trigonométrique**Définition 11**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de z tout réel θ qui vérifie

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$$

On note $\arg(z)$ un tel réel. L'écriture $z = |z|e^{i\arg(z)}$ est appelée la **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z .

Proposition 12

Soient z et z' deux nombres complexes, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

3.2 Equations dans \mathbb{C}

3.2.1 Factorisations dans \mathbb{C}

Proposition 13

Formule du binôme de Newton

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Démonstration :

Même démonstration que pour les réels.

Proposition 14

$a^n - b^n$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}$$

Démonstration :

Il suffit de développer le second membre et on obtient le membre de gauche.

3.2.2 Racines n -ièmes dans \mathbb{C}

Définition 15

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n -ième de Z** tout nombre z qui vérifie $z^n = Z$.

Remarques :

- R1** – Si $n = 2$, on appelle racine carrée d'un nombre complexe, tout nombre z qui vérifie $z^2 = Z$. Par exemple, i est une racine carrée de -1 .
- R2** – On n'écrit JAMAIS \sqrt{z} pour z complexe (sauf si c'est un réel positif)

Théorème 16

Racines n -ièmes de 1

Les n racines n -ièmes de 1 sont exactement les nombres

$$\omega_k = \exp\left(ik \frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Il y en a donc exactement n . On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de 1.

Démonstration :

Cherchons z sous sa forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff \rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = 1 \exists k \in \mathbb{Z} / n\theta = 2k\pi \\ \rho = 1 \exists k \in \mathbb{Z} / z = \exp\left(ik \frac{2\pi}{n}\right) = \omega_k \end{array} \right. \end{aligned}$$

De plus, cherchons les racines n -ièmes égales pour en garder le minimum :

$$\begin{aligned}\omega_k = \omega_\ell &\iff \exists p \in \mathbb{Z} / \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi \\ &\iff \exists p \in \mathbb{Z} k = \ell + pn\end{aligned}$$

Donc ω_k et ω_ℓ sont distincts si et seulement si ℓ et k diffèrent d'un multiple de n . On peut donc se restreindre à prendre n ω_i "consécutifs" qui seront donc bien distincts (par exemple $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) et on obtient bien toutes les racines n -ièmes de 1.

Proposition 17

Tout nombre complexe non nul Z possède exactement n racines n -ièmes distinctes.

Si on connaît une des racines (par exemple $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$), on obtient toutes les racines en multipliant z_0 par les n racines de l'unité.

Proposition 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle. Autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0$$

Démonstration :

En effet, on obtient une somme de termes d'une suite géométrique. Notons $q = \omega_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Alors, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\omega_k = q^k$. Ainsi, puisque $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 0$$

Remarques :

R1 – On a $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

R2 – On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. On a en particulier

$$1 + j + j^2 = 0$$

R3 – On a $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ avec $i^2 = -1$

Démonstration :

En effet, si on pose $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$, on a bien $z_0^n = |Z|e^{i\arg(Z)} = Z$, donc z_0 est bien une racine n -ième de Z . Cherchons donc maintenant toutes les autres. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}z^n = Z &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \frac{z}{z_0} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z = z_0\omega_k\end{aligned}$$

Et les ω_k étant bien deux à deux distincts pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le nombre complexe Z admet exactement n racines n -ièmes dans \mathbb{C} .

Remarque :

Soit Z un nombre complexe dont on cherche les racines carrées.

- Si on connaît Z sous forme exponentielle, $Z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors les racines carrées sont exactement $\pm \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$.
- Si on connaît Z sous forme algébrique, $Z = X + iY$, si on cherche les racines carrées z sous la forme $z = x + iy$, on a :

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ 2xy = Y \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent x^2 et y^2 et la dernière équation donne le signe des couples solution (x, y) .

3.2.3 Equation du second degré

Théorème 19

On considère l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

On appelle **discriminant de l'équation (E)** le complexe

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Alors, si on note δ et $-\delta$ les racines carrées de Δ dans \mathbb{C} , les solutions de (E) dans \mathbb{C} , sont

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

qui sont égales si $\Delta = 0$

Démonstration :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right) \end{aligned}$$

Proposition 20

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration :

On sait que $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2$. On identifie alors les coefficients et on trouve les relations voulues.

3.3 Trigonométrie

3.3.1 Fonctions trigonométriques

Proposition 21

Les fonctions \cos et \sin , définies sur \mathbb{R} vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration :

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1, 1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

Définition 22

On appelle **fonction tangente**, la fonction \tan définie par l'expression :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Elle est définie partout où $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\times

3.3.2 Propriétés trigonométriques

Proposition 23

Pour tout x réel tel que les expressions suivantes existent, on a :

$$\begin{array}{l|l|l}
 \cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
 \cos(x + 2\pi) = \cos(x) & \sin(x + 2\pi) = \sin(x) & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\
 \cos(x + \pi) = -\cos(x) & \sin(x + \pi) = -\sin(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \\
 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) & \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}
 \end{array}$$

Proposition 24

La fonction cosinus est 2π -périodique et paire sur \mathbb{R} .

La fonction sinus est 2π -périodique et impaire sur \mathbb{R} .

La fonction tangente est π -périodique et impaire sur son domaine de définition.

Proposition 25

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = -y + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sin(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$$