CHAPITRE 4

Applications et fonctions

4.1 Applications d'un ensemble dans un autre

4.1.1 Définitions

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.
On dit que f est une **application de E dans F** si et seulement si, à tout élément x de E est associé un et un unique élément de F noté $f(x)$, et appelé **image de x par f**. L'application f se note :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- E est appelé l'**ensemble de départ** de l'application f,
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de l'application f.
- On dit qu'un élément $y \in F$ admet **un antécédent** (au moins) s'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Exemples :

E 1 – Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$. C'est une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

E 2 – Les ensembles E et F ne sont pas forcément des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Par exemple, on peut créer une application :

$$g: \begin{array}{ccc} \{\text{élèves de } 813\} & \longrightarrow & \{\text{Villes du Monde}\} \\ Y & \longmapsto & \text{Ville de résidence de } Y \end{array}$$

Remarques :

R 1 – Dans une application, TOUS les éléments de E admettent une image dans F. Cependant, les éléments de F n'ont pas forcément tous un antécédent dans E par l'application : l'ensemble F peut être "gros" a priori.

R 2 – Deux applications f et g sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ E,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

4.1.2 Restriction et prolongement d'applications

Définition 2

Soient E et F deux ensembles et soit A une partie de E.
Soit $f : E \to F$ une application de E dans F. On appelle **restriction de f à la partie A** l'application :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f_{|A}(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$.
On a donc restreint l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemple :

Soit f l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ f(x) = \ln(-x), \qquad f(0) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \ln(x)$$

Alors si on note g la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$. On a : $g : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(-x) \end{array}$.

Définition 3

Soient E et F deux ensembles et soit E' un ensemble contenant E.
Soit $f : E \to F$ une application de E dans F. On appelle **prolongement de f à l'ensemble E'** toute application g :

$$g : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$, autrement dit telle que $g_{|E} = f$.
On a donc augmenté l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemples :

E 1 – L'appication ln n'est définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut par exemple la prolonger sur tout $\mathbb{R}^+$ en posant : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

E 2 – $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est également un prolongement de ln à $\mathbb{R}^+$.

4.1.3 Images directes et images réciproques

Définition 4

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
Soit A une partie de E. On appelle **image directe de A par l'application f** l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$\boxed{f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in A, y = f(x)\}}$$

c'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A.

Définition 5

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque de B par l'application f** l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}}$$

c'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$. L'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}^+$.
L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$.
Soit $A = [0, 3]$. Quelle est l'image de la partie A par f ?

$$\forall x \in [0, 3],\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \Longleftrightarrow 1 \leqslant x + 1 \leqslant 4 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 2$$

Ainsi, l'ensemble des images des éléments de $[0, 3]$ est l'ensemble $[1, 2]$. On a donc

$$f([0, 3]) = [1, 2]$$

Soit $B = [-3, 5]$ qui est bien une partie de $\mathbb{R}$. Quelle est l'image réciproque de la partie B par f ?

$$-3 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x + 1 \leqslant 25 \Longleftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 24$$

Donc l'ensemble des x qui ont pour image un élément de $[-3, 5]$ est exactement l'ensemble $\mathbb{R}^+ \cap [-1, 24] = [0, 24]$. Donc

$$f^{-1}([-3, 5]) = [0, 24]$$

Remarque :

Attention, on peut écrire $f(x)$: c'est l'image de l'élément x. Mais on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$: cela ne représenterait pas l'image réciproque de l'élément x. Il faut écrire $f^{-1}(\{x\})$ pour avoir l'ensemble des antécédents possibles pour x.

4.1.4 Composition d'applications

Définition 6

Soient E, F, G trois ensembles.
Soit f une application de E dans F, et soit g une application de F dans G.
On appelle **application composée de f avec g** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \end{array}$$

Remarques :

R 1 – Pour que $g \circ f$ soit bien définie, l'ensemble d'arrivée de l'application f doit être inclus dans l'ensemble de départ de l'appliction g.

R 2 – Si les applications existent, on n'a pas forcément $g \circ f = f \circ g$. On dit que la loi $\circ$ n'est pas commutative.

Exemple :

Soient les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Peut-on définir $f \circ g$?
L'ensemble d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ donc on peut bien composer par f ensuite.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = 2\ln(x) - 3$$

Peut-on définir $g \circ f$?
L'application f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc a priori, certaines images ne seront pas dans $\mathbb{R}^{+*}$. On ne peut pas écrire $g \circ f$ sur tout $\mathbb{R}$, peut-être pour certaines valeurs.

$$2x - 3 \in \mathbb{R}^{+*} \iff 2x - 3 > 0 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}$$

Pour tout $x > \dfrac{3}{2}$, on peut définir $g \circ f(x)$, et alors :

$$\forall x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \ln(2x-3)$$

4.2 Nombre d'antécédants par une application

4.2.1 Applications injectives

Définition 7

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application injective** si tous les éléments de F admettent **au plus un antécédent**, i.e. ils en admettent un ou aucun.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in E, \quad \text{si } f(x) = f(x'), \quad \text{alors } x = x'}$$

Remarque :

On a également : $\boxed{f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in E, \quad \text{si } x \neq x', \quad \text{alors } f(x) \neq f(x')}$.

4.2.2 Applications surjectives

Définition 8

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application surjective** si tous les éléments de F admettent au moins un antécédent.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff \forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x)}$$

Remarques :

R 1 – On a également : $\boxed{f \text{ surjective} \iff f(E) = F}$.

R 2 – Si f est une application de E dans F, f réalise toujours une surjection de E dans $f(E)$.

4.2.3 Applications bijectives

Définition 9

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application bijective** si tous les éléments de F admettent exactement un et un seul antécédent par l'application f.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ bijective} \iff \forall y \in F,\ \exists !\, x \in E \ / \ y = f(x)}$$

Remarque :

Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ bijective} \quad \iff \quad \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$$

Définition 10

Si f est une bijection de E sur F, alors tout élément y de F admet un et un seul antécédent dans E. On définit ainsi une application de F dans E, appelée l'application réciproque, notée f^{-1}. On a alors

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Remarques :

R 1 – Si f est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est une bijection de F sur E et on a :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

R 2 – Si f est une bijection de E dans F, f est donc inversible et son application réciproque est f^{-1}, autrement dit :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = Id_F$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$$

Remarque :

Si on a une application f de E dans F, alors pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Donc si on connaît $y = f(x)$, il suffit d'exprimer x en fonction y pour déterminer l'expression de l'application réciproque (ce qui n'est pas toujours possible. . .).

4.3 Fonctions réelles

4.3.1 Définitions

Définition 11

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$.

On dit que f est une **fonction de I dans J** si tout élément x de I a **au plus une image dans J**.

On appelle alors **Domaine de définition** de la fonction f le sous-ensemble D de I constitué par tous les éléments de I qui ont une image par f, autrement dit tous les x de I tels que $f(x)$ existe.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'on restreint une fonction à son domaine de définition, on obtient une application. On confondra donc en général les deux vocabulaires par abus de langage.

R 2 – Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, on peut alors créer une combinaison linéaire de f et g, une fonction produit, une fonction inverse parfois :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$.
- $\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$.
- $\forall x \in I,\ \text{ si } g(x) \neq 0,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4.3.2 Symétries

Définition 12

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **paire** si : $(\forall x \in D,\ -x \in D)$ et $\left(\boxed{\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)}\right)$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est **impaire** si : $(\forall x \in D,\ -x \in D)$ et $\left(\boxed{\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)}\right)$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque :

> La courbe peut admettre **un axe de symétrie** d'équation $x = a$, ou alors un **point de symétrie** $\Omega(a, b)$.
> **Méthode pour rechercher une éventuelle symétrie :**
> L'ensemble D doit être symétrique par rapport à a. De plus, si pour tout h réel tel que $a + h \in D$, on a :
> - $f(a + h) = f(a - h)$, alors la courbe repr. de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.
> - $f(a + h) + f(a - h) = 2b$, alors la courbe repr. de f est symétrique par rapport au point $\Omega(a, b)$.

4.3.3 Périodicité

Définition 13

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et soit T un réel. On dit que f est ***T*-périodique** si :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \in D \Longleftrightarrow x + T \in D$
- $\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x)$

4.3.4 Fonctions monotones

Définition 14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **strictement croissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
- f est **strictement décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.

4.3.5 Fonctions majorées et minorées

Définition 15

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur D** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$
- f est **minorée sur D** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$.
- f est bornée sur D si f est majorée et minorée sur D.

Remarque :

> En particulier, lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est **positive**.
> Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est **négative**.

Définition 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un majorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = M$
- On dit que M est un **minimum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un minorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = m$

Définition 17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est une fonction majorée sur I, alors l'ensemble des majorants de f admet un plus petit élément, appelé la **borne supérieure de f**. On le note : $\sup_{x \in I} f(x)$
- Si f est une fonction minorée sur I, alors l'ensemble des minorants de f admet un plus grand élément, appelé la **borne inférieure de f**. on le note : $\inf_{x \in I} f(x)$.

4.4 Fonctions usuelles à connaître

4.4.1 Fonctions polynomiales

Définition 18

Une fonction f est dite **polynomiale**, de degré n, si elle s'écrit :

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

avec $a_n \neq 0$ et $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Exemples :

E 1 – La **fonction nulle** définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0}$$

est une fonction polynomiale particulière dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, c'est une fonction polynomiale de degré $-\infty$.

E 2 – Les **fonctions constantes** sont des fonctions polynomiales :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Leur degré est nul si $a \neq 0$ et égal à $-\infty$ si $a = 0$.

E 3 – Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les **fonctions affines** du type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

Leur courbe représentative est une droite non verticale. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** et b est **l'ordonnée à l'origine**.

E 4 – Les fonctions polynomiales de degré 2 sont les fonctions du type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c}, \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Leur courbe représentative est une **parabole** d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Remarque :

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\Delta > 0$, alors :
  - f s'annule deux fois, en $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - On peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
  - f est du signe de a à l'extérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, alors :
  - f s'annule une seule fois, en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
  - On peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x-x_0)^2$
  - f est du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, alors :
  - f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
  - f est du signe de a et ne s'annule jamais.

4.4.2 Fonction inverse

Définition 19

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Remarques :

R 1 – La fonction inverse est définie et impaire sur $\mathbb{R}^*$.

R 2 – On dit que la courbe de la fonction inverse est une **hyperbole**.

R 3 – La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{ll} \text{si } 0 < a \leqslant b & \text{alors } 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} \\[2ex] \text{si } a \leqslant b < 0 & \text{alors } \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} < 0 \\[2ex] \text{si } a < 0 < b & \text{alors } \dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b} \end{array}$$

R 4 – La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! cela n'a pas de sens puisque $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

4.4.3 Fonction racine carrée

Définition 20

Soit $a \geqslant 0$. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$. La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$.

Remarques :

- **R 1** – Pour $a \geqslant 0$, on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.
- **R 2** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$
- **R 3** – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- **R 4** – Si $xy \geqslant 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$
- **R 5** – La fonction racine carrée est définie et croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition 21

De même, on peut définir <u>pout tout entier n pair</u> une fonction racine n-ième sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

et si <u>n est impair</u> on définit une fonction racine n-ième sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

4.4.4 Fonction logarithme népérien

Définition 22

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- **R 1** – Par définition, la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et $\boxed{\ln(1) = 0}$.
- **R 2** – La fonction ln est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.
- **R 3** – La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- **R 4** – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ et :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

- **R 5** – Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln(|y|)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$.
- **R 6** – Pour $a > 0$ et x réel $\boxed{\ln(a^x) = x\ln(a)}$.

4.4.5 Fonction exponentielle

Définition 23
La fonction $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bijective : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

- **R 1** – La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- **R 2** – Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)}$
- **R 3** – La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **R 4** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln(y)}$.
- **R 5** – Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- **R 6** – On a $\boxed{\ln(e) = 1}$, $\boxed{e^1 = e \simeq 2.718}$ et $\boxed{e^0 = 1}$.
- **R 7** – Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Longleftrightarrow a < b$.
- **R 8** – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)}$ et $\boxed{\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}}$
- **R 9** – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{e^{ab} = (e^a)^b = \left(e^b\right)^a}$
- **R 10** – Pour tout $a > 0$, on a $\boxed{a^x = e^{x\ln(a)}}$.

4.4.6 Fonctions puissance

Définition 24
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction **puissance** α :

$$\boxed{f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

est définie pour tout $x > 0$.

Remarques :

- **R 1** – Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$: c'est un cas particulier.
- **R 2** – Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- **R 3** – Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$ et par convention, $x^0 = 1$
- **R 4** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, on a : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
- **R 5** – Pour tous x et y strictement positifs, on a :
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$
- **R 6** – Si on peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, alors pour tout $x > 0$,
$$x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$
$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$