

Sommes et produits

2.1 Sommes : symbole  $\sum$

2.1.1 Indices muets

**Définition 1**

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et soient  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_p$  des réels. La somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_p$  se note aussi

$$S = \sum_{k=0}^p u_k$$

**Remarques :**

**R1** – La lettre  $k$  peut en réalité être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée!). On dit que c'est une **lettre muette**, appelée l'**indice de sommation**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^p u_k = \sum_{i=0}^p u_i = \sum_{j=0}^p u_j$$

**R2** – Dans la somme  $\sum_{k=0}^p u_k$ , il y a  $n + 1$  termes.

Plus généralement, dans la somme  $\sum_{k=p}^n u_k$ , il y a  $n - p + 1$  termes.

**R3** – On peut parfois séparer une somme en deux. Soit  $n \geq 1$  et soit  $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . On a :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

et

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

## 2.1.2 Propriétés

### Proposition 2

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et soient  $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$  des réels. Alors

•

$$\sum_{k=1}^p (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^p v_k$$

• Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=1}^p \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^p u_k$$

•

$$\sum_{k=1}^p 1 = p$$

### Remarques :

**R1** – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \quad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

**R2** – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos : c'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme  $v_{n+1} - v_n$  :

$$\sum_{k=1}^p (v_{k+1} - v_k) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{p+1} - v_p) = v_{p+1} - v_1$$

On dit qu'on a une **somme télescopique**

## 2.1.3 Changements d'indices

### Remarque :

Lorsqu'on a une somme  $\sum_{k=p}^n a_k$ , on peut réaliser pour convenance deux types de **changements d'indice** :

- un changement par décalage d'indice : on pose  $\ell = k + j \iff k = \ell - j$  où  $k$  est un entier fixé.
- un changement où on inverse l'ordre d'énumération : on pose  $\ell = n - k \iff k = n - \ell$ .

Après un changement d'indice, le nombre de termes dans la somme doit rester inchangé !

### Exemples :

**E1** –

$$\sum_{k=2}^p \frac{1}{k-1} = \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

**E2** –

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell}$$

## 2.1.4 Sommes classiques

**Théorème 3***Somme des entiers, des carrés, des cubes*

Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Démonstration :**

1. • Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right\|$ .

• Pour  $n = 0$ , vérifions que la propriété est vraie. On a  $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) \stackrel{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

• Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

2. • Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\|$ .

• Pour  $n = 0$ , vérifions que la propriété est vraie. On a  $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left( n+1 + \frac{n(2n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

• Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

3. • Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\|$ .

• Pour  $n = 0$ , vérifions que la propriété est vraie. On a  $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ . Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left( \frac{n^2}{4} + n+1 \right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

• Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

**Conséquence 4***Somme des termes d'une suite arithmétique*

Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique, alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

**Remarque :**

Schématiquement, on peut retenir la formule suivante pour la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(\text{1er terme} + \text{Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}$$

**Théorème 5***Somme des puissances*

Soit  $n$  un entier naturel et soit  $q$  un réel différent de 1. Alors :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Démonstration :**

- Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ".
- Pour  $n = 0$ , vérifions que la propriété est vraie. On a  $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1 - q}{1 - q}$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, i.e. montrons que  $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$ . Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

- Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

**Conséquence 6***Somme des termes d'une suite géométrique*

Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

**Remarque :**

Schématiquement, on peut retenir la formule suivante pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  :

$$\sum_{k=p}^n u_k = (\text{1er terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

## 2.2 Produits : symbole $\prod$

### 2.2.1 Produits

#### Définition 7

Soient  $u_1, u_2, \dots, u_p$  des réels. on note leur produit  $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_p = \prod_{k=1}^p u_k$ .

Un cas particulier, le produit  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$  se note  $n!$  et se prononce "**factorielle**  $n$ ".

#### Remarques :

**R1** – Les règles de changements d'indices marchent de la même manière que pour les sommes. Par exemple, la variable  $k$  n'a de sens que dans le symbole  $\prod$  et pas en dehors.

**R2** – Pour tous réels  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ , on a :

$$\prod_{k=0}^n (a_k b_k) = \prod_{k=0}^n a_k \times \prod_{k=0}^n b_k$$

**R3** – Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tous réels  $a_0, \dots, a_n$ , on a :

$$\prod_{k=0}^n \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^n a_k$$

**R4** – Pour  $1 \leq p \leq n-1$ , on a :

$$\prod_{k=0}^n a_k = \prod_{k=0}^p a_k \times \prod_{k=p+1}^n a_k$$

### 2.2.2 Factorielles

#### Définition 8

Pour tout  $n$  entier,  $n \geq 1$ , on définit le nombre "**factorielle**  $n$ " par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k$$

et par convention  $0! = 1$

#### Exemples :

**E1** –  $0! = 1$ .

**E2** –  $1! = 1$ .

**E3** –  $2! = 2 \times 1 = 2$ .

**E4** –  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ .

**E5** –  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

#### Proposition 9

Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$n! = n \times (n-1)!$$

**Remarque :**

Attention, que la formule

$$n! = n \times (n - 1)!$$

n'est vrai que pour tout entier  $n \geq 1$ .

Pour  $n \geq 0$ , on peut la réécrire par :

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!$$

**2.2.3 Coefficients binomiaux****Définition 10**

Pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on définit le **coefficient binomial " $p$  parmi  $n$ "**, noté  $\binom{n}{p}$  par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

**Remarque :**

On peut aussi définir le coefficient binomial lorsque les entiers  $n$  et  $p$  ne vérifient pas  $0 \leq p \leq n$  : par convention on pose  $\binom{n}{p} = 0$  dès que soit  $n < 0$ , soit  $p < 0$ , soit  $n < p$

**Proposition 11**

- Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\binom{n}{0} = 1$ .
- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$ .
- Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .
- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\binom{n}{n-1} = n$ .
- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\binom{n}{n} = 1$
- Pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

- Pour tous  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

**Démonstration :**

Il suffit de remplacer avec les factorielles et de simplifier les expressions. Quelques exemples :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \times n!} = \frac{1}{0!} = 1 \\ \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)! \times (n-(n-p))!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \binom{n}{p} \\ p \binom{n}{p} &= p \times \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)! \times (n-p)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times ((n-1)-(p-1))!} = n \binom{n-1}{p-1} \end{aligned}$$

**Théorème 12***Formule de Pascal*

Pour tous entiers  $n$  et  $p$ , on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

**Démonstration :**

On a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \left( \frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \frac{n+1}{(n-p)(p+1)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1} \end{aligned}$$

**Remarque :**

Cette formule nous aide à construire le **Triangle de Pascal** qui contient tous les coefficients binomiaux.

degré						
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	1	⋯	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	⋯	⋯
$n+1$	1	⋯	$\binom{n+1}{p+1}$	⋯	⋯	⋯

## 2.2.4 Formule du binôme de Newton

### Théorème 13

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $n$  un entier. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### Démonstration :

Posons  $a$  et  $b$  deux réels. Démontrons la formule par récurrence sur  $n$ .

- Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\mathcal{P}(n)$  : " $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ".
- $n = 0$ . Alors  $(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons la propriété  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Montrons qu'alors la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également, autrement dit que  $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \times (a + b)^n \stackrel{\text{HR}}{=} (a + b) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell=k+1}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \left( \binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right) a^\ell b^{n+1-\ell} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.

- Par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout entier  $n \geq 0$ .

### Remarque :

Cette formule généralise l'identité remarquable  $(a + b)^2$  que l'on connaît déjà bien :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$