CHAPITRE 10

Polynômes

On désignera par $\mathbb{K}$ soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

10.1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

10.1.1 Définitions

Définition 1

On dit que P est un **polynôme de degré n** ($n \in \mathbb{N}$), à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'il s'écrit sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$.
Le coefficient a_i s'appelle le **coefficient d'indice i**.

Remarques :

- **R 1** – Le **degré de P** que l'on note $\deg(P)$ est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est alors appelé le **coefficient dominant**.
- **R 2** – Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : on note également le polynôme nul par 0. Par convention, $\deg(0) = -\infty$.
- **R 3** – Un polynôme que n'a qu'un seul coefficient non nul est appelé un **monôme**.
- **R 4** – L'indéterminée X peut être substituée par :
  - des valeurs réelles x (on dit alors qu'on a une **fonction polynomiale**)
  - des valeurs complexes z
  - des fonctions : $u(\theta) = \cos(\theta)$, $v(x) = e^x$, ...
- **R 5** – On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ si on sait dans quel corps se trouvent les coefficients.
- **R 6** – On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ \deg(P) \leqslant n\}$$

Théorème 2 ***Théorème d'identification***

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si leurs coefficients respectifs de même indice sont égaux.
Si $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *et* $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$,

$$P = Q \iff \begin{cases} p = q \\ \forall i \in [\![0, p]\!], a_i = b_i \end{cases}$$

10.1.2 Opérations

Proposition 3

- *La somme de deux polynômes est encore un polynôme. On additionne les coefficients de même degré. De plus,*
$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$
- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$: on dit que λ est un* ***scalaire*** *(un nombre). Alors si P est un polynôme, λP est encore un polynôme et*
$$\deg(P) = \deg(\lambda P) \quad \textit{si } \lambda \neq 0$$

  Plus généralement, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
$$\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

  On dit que $\mathbb{K}_n[X]$ ***est stable par combinaison linéaire.***
- *Le produit de deux polynômes est un polynôme. De plus,*
$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Remarques :

R 1 – Si $\deg(P) \neq \deg(P)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

R 2 – Si $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ (avec $a_p \neq 0$) et $Q(X) = b_q X^q + \cdots + b_1 X + b_0$ (avec $b_q \neq 0$), alors
$$P(X)Q(X) = c_{p+q} X^{p+q} + \cdots + c_k X^k + \cdots + c_1 X + c_0$$
avec
$$\forall k \in [\![0, p+q]\!],\ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$
(avec convention $a_j = 0$ si $j > p$ et $b_j = 0$ si $j > q$.

R 3 – Le coefficient dominant d'un produit de k polynômes est obtenu en multipliant les k coefficients dominants des polynômes.

R 4 – L'ensemble des polynômes est **intègre** : il vérifie :
$$P(X)Q(X) = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$
De plus, on a donc
$$\begin{cases} A(X)P(X) = A(X)Q(X) \\ A(X) \neq 0 \end{cases} \implies P = Q$$

10.1.3 Substitution par un polynôme

Définition 4

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On définit le polynôme $P(Q(X))$ (ou $P \circ Q(X)$) par : $(P \circ Q)(X) = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (Q(X))^k)$ i.e. on substitue X dans P par $Q(X)$.

Remarques :

- **R 1** – Si P et Q sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, alors $\deg(P(Q(X))) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- **R 2** – Un polynôme P peut donc être noté indifféremment P ou $P(X)$.

10.1.4 Dérivation

Définition 5

Soit P un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ On définit son **polynôme dérivé**, noté P' par :

$$\boxed{P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}}$$

Remarques :

- **R 1** – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme dérivé de X^n est donc nX^{n-1}
- **R 2** – Le polynôme dérivé d'un polynôme constant (éventuellement nul) est le polynôme nul.
- **R 3** – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(P+Q)' = P' + Q', \qquad (\lambda P)' = \lambda P', \qquad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

- **R 4** – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- **R 5** – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

Proposition 6

Un polynôme est indéfiniment dérivable. On écrit $P^{(k)}$ le polynôme obtenu quand on a dérivé successivement k fois le polynôme P :

$$P^{(0)} = P, \quad P^{(1)} = P', \qquad \forall k \geqslant 1,\ P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$$

Exemple :

La dérivée k-ième du polynôme X^n est : $(X^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)X^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$.

Remarques :

- **R 1** – Si $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors $\deg(P') = n-1$. Attention, c'est faux si $n = 0$.
- **R 2** – En général on a plutôt que $\boxed{\text{si } \deg(P) \leqslant n, \text{ alors } \deg(P') \leqslant n-1}$
- **R 3** – Si $\deg(P) = n$, alors pour tout $k > n$, on a $P^{(k)} = 0$.

10.2 Division dans $\mathbb{K}[X]$

10.2.1 Divisibilité

Définition 7

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B ou que B **est un multiple de** A s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$B = AQ$$

On dit alors que B **est factorisable par** B.

Remarques :

- **R 1** – Si $B = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que A et B sont **proportionnels**.
- **R 2** – Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $P = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda P)$.
  Ainsi, tous les polynômes constants non nuls $Q = \mu = \dfrac{1}{\lambda}$ (avec $\lambda \neq 0$) et les polynômes non nuls proportionnels à P : $\lambda P(X)$, sont des diviseurs de P.
- **R 3** – On dit que P est **irréductible** si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes proportionnels à P.
- **R 4** – Les polynômes de degré 0 et de degré 1 sont toujours irréductibles.

10.2.2 Division euclidienne

Théorème 8

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q est appelé le ***quotient****, et R le* ***reste****, dans la division euclidienne de A par B.*

Démonstration :

On admettra l'existence de l'écriture $A = BQ + R$.

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux couples $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q', R') \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} A = BQ + R = BQ' + R' \\ \deg(R) < \deg(B) \\ \deg(R') < \deg(B) \end{cases}$$

On a donc $B(Q - Q') = R' - R$.
Supposons qu'on ait $Q - Q' \neq 0$.
Alors, on aurait $\deg(R' - R) = \deg(B(Q - Q')) = \deg(B) + \deg(Q - Q') \geqslant \deg(B)$.
Or, on sait que $\deg(R' - R) \leqslant \max(\deg(R'), \deg(R)) < \deg(B)$. On arrive à une contradiction
On a donc nécessairement $Q - Q' = 0$, et on en déduit alors que $R - R' = 0$.

Remarque :

Le polynôme B divise le polynôme A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

10.2.3 Racines d'un polynôme

Définition 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que **a est une racine de P** si $P(a) = 0$.

Proposition 10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$

$$P(a) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(X) = (X-a)Q(X)$$

Démonstration :

On regarde la division euclidienne de P par $X - a$:

$$\exists!(Q, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K} \ / \ P(X) = (X-a)Q(X) + \alpha$$

On prend en a : on a $P(a) = 0 + \alpha$, donc

$$P(X) = (X-a)Q(X) + P(a)$$

En particulier, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est donc $P(a)$.

Ainsi, $(X - a)|P$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Remarques :

- **R 1** – Si on sait qu'on a une racine, on sait donc qu'on peut factoriser notre polynôme. Il peut donc être utile de chercher des racines évidentes.
- **R 2** – On peut généraliser le résultat à n racines <u>distinctes</u> :

$$P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(X) = (X-a_1)\cdots(X-a_n)Q(X)$$

10.2.4 Racines multiples

Définition 11

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine multiple d'ordre k de P** si

$$(X-a)^k \text{ divise } P \qquad \text{et} \qquad (X-a)^{k+1} \text{ ne divise pas } P$$

Autrement dit, $\exists! Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(X) = (X-a)^k Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Théorème 12

$$a \text{ racine d'ordre } k \text{ de } P \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

10.2.5 Formule de Taylor-Polynôme

Théorème 13 ***Formule de Taylor-Polynôme***

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a :

$$\boxed{P(a+X) = P(a) + P'(a)X + \frac{P''(a)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}X^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n}$$

où $P^{(k)}$ désigne le polynôme dérivé k-ième de P. Autrement dit, on a :

$$\boxed{P(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k}$$

Remarques :

R 1 – On peut aussi écrire ce théorème de cette manière : pour $a \in \mathbb{K}$,

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2}(X-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

et en particulier pour le cas où $a = 0$, on a :

$$\boxed{P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}X^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n}$$

R 2 – Les coefficients d'un polynôme P sont donc en réalité les dérivées successives de P en 0 divisés par des factorielles

R 3 – C'est exactement la formule des Développements Limités.

Démonstration :

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

Notons $Q(X) = P(a+X)$: c'est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ Il existe donc $n+1$ scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$(*) P(a+X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient :

$$P(a) = \lambda_0$$

Si on dérive la relation $(*)$, on a :

$$P'(a+X) = \lambda_1 + 2\lambda_2 X + \cdots + n\lambda_n X^{n-1}$$

En évaluant cette relation en $x = 0$, on obtient :

$$P'(a) = \lambda_1$$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, en dérivant k fois $(*)$, on obtient :

$$P^{(k)}(a+X) = k!\ \lambda_k$$

10.2.6 Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 14

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est **réductible dans $\mathbb{K}[X]$** si on peut l'écrire :

$$P = P_1 \times P_2$$

avec P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non constants. Dans le cas contraire, on dit que le polynôme P est **irréductible dans $\mathbb{K}[X]$**.

Exemples :

E 1 – Le polynôme $X^2 - 1$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'on peut l'écrire

$$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

E 2 – Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais réductible dans $\mathbb{C}[X]$ puisque

$$X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$$

Théorème 15 ***Théorème de D'alembert-Gauss***

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors P admet toujours au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Plus généralement, Tout polynôme P de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ admet n racines complexes comptées avec multiplicité, et on peut écrire :

$$P(X) = \lambda (X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda \neq 0$ le coefficient dominant, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$.

Remarques :

R 1 – Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 0 et de degré 1.

R 2 – Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 0, de degré 1, et les polynômes de degré 2 n'ayant pas de racines réelles (ceux à discriminant négatif).

R 3 – <u>Un polynôme de degré n admet donc au maximum n racines distinctes.</u>

R 4 – Si un polynôme P appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et admet au moins $n+1$ racines, c'est le polynôme nul.

R 5 – Tout polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

R 6 – Si P est à coefficients tous réels (i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\alpha \text{ racine complexe de } P \iff \overline{\alpha} \text{ racine complexe de } P$$