CHAPITRE 9

Trigonométrie

9.1 Fonctions circulaires

9.1.1 Définitions

Définition 1

Pour tout réel x, on définit $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres définis par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \mathrm{Re}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \mathrm{Im}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Proposition 2

Les fonctions cos *et* sin *sont donc définies sur* $\mathbb{R}$, *et vérifient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1} \ \textit{et} \ \boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1} \ \textit{et} \ \boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1}$$

Démonstration :

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1,1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

Proposition 3

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sin(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$$

Remarque :

> $\boxed{\cos(x)=0} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
> $\boxed{\cos(x)=1} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=2k\pi$
> $\boxed{\cos(x)=-1} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\pi+2k\pi$
>
> $\boxed{\sin(x)=0} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=k\pi$
> $\boxed{\sin(x)=1} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
> $\boxed{\sin(x)=-1} \iff \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Définition 4

On appelle **fonction tangente**, la fonction tan définie par l'expression : $\boxed{\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$.

Elle est définie partout où $\cos(x)\neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Valeurs remarquables des cos,sin,tan :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\star\star$

9.1.2 Propriétés trigonométriques

Proposition 5 — ***Parité, périodicité***

La fonction cosinus est 2π-périodique et paire sur $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est π-périodique et impaire sur son domaine de définition.
On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{\cos(-x)=\cos(x)}\quad \boxed{\cos(x+2\pi)=\cos(x)}$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{\sin(-x)=-\sin(x)}\quad \boxed{\sin(x+2\pi)=\sin(x)}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\},\quad \boxed{\tan(-x)=-\tan(x)}\quad \boxed{\tan(x+\pi)=\tan(x)}$$

Proposition 6 — ***Formules de symétries***

Pour tout réel x tel que les expressions aient un sens, on a par lecture du cercle trigonométrique :

$$\boxed{\cos(x+\pi)=-\cos(x)}\quad \boxed{\sin(x+\pi)=-\sin(x)}\quad \boxed{\tan(x+\pi)=\tan(x)}$$
$$\boxed{\cos(\pi-x)=-\cos(x)}\quad \boxed{\sin(\pi-x)=\sin(x)}\quad \boxed{\tan(\pi-x)=-\tan(x)}$$
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)}\quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)}\quad \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}}$$
$$\boxed{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)}\quad \boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)}\quad \boxed{\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan(x)}}$$

Remarque :

Il existe aussi de nombreuses autres formules trigonométriques liant les fonctions cosinus et sinus, mais seules les précédentes sont à connaître par coeur. Toutes les autres sont à re-démontrer, et le résultat sera toujours donné par l'énoncé.

Exemples :

E 1 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules d'addition suivantes** :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$$

On a $\cos(a+b) = \mathrm{Re}(e^{i(a+b)})$ et $\sin(a+b) = \mathrm{Im}(e^{i(a+b)})$.
Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$, on en déduit donc bien que d'une part : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que d'autre part : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

E 2 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules de l'angle moitié** :

$$\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

On a $\cos(a) + \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} + e^{ib})$. De même $\sin(a) + \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia} + e^{ib})$.
Or, on a :

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\ 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{ia} + e^{ib}$, on en déduit bien les formules proposées.

E 3 – Il existe également des **techniques de linéarisation** des puissances de cosinus ou sinus.
Par exemple : <u>peut-on linéariser $\cos^4(x)$</u>, i.e. écrire $\cos^4(x)$ comme une somme de termes de la forme $\lambda\cos(\beta x)$ ou $\mu\sin(\gamma x)$.
On utilise alors les formules d'Euler, puis la formule du Binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + \binom{4}{1}e^{3ix}e^{-ix} + \binom{4}{2}e^{2ix}e^{-2ix} + \binom{4}{3}e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \frac{1}{16}\left((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right) = \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}} \end{aligned}$$

De même, peut-on linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$?

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{1}{16i}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{16i}\left((e^{4ix} - e^{-4ix}) + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})\right) = \frac{1}{16i}\left(2i\sin(4x) + 4i\sin(2x)\right) = \boxed{\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)} \end{aligned}$$

9.1.3 Etude de la fonction cosinus

Théorème 7 ***Dérivation de l'exponentielle complexe, admis***

La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et elle se dérive comme toute fonction du type $x \mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = ix$ et $u'(x) = i$. On a donc :

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{ix}, \qquad \text{alors } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = ie^{ix}$$

Proposition 8

La fonction cos*, donnée par* $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)}$$

Démonstration :

La fonction cos est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = \dfrac{ie^{ix} + (-i)e^{-ix}}{2} = \dfrac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = \dfrac{i}{2}(2i\sin(x)) = i^2\sin(x) = -\sin(x)$.

Proposition 9

La fonction cos *admet un DL de tout ordre en 0 qui est :*

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)}$$

Démonstration :

La fonction cos étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur au moins $]-1,1[$, le théorème de Taylor-Young assure qu'elle admet bien un *DL* de tout ordre en 0.

On sait que pour tout entier $n \geqslant 0$, $e^{ix} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(ix)^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$ et $e^{-ix} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(ix)^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right))$, donc par somme des DL, on obtient :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n} (i^k + (-i)^k)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

Or, dès que k est impair, on a $(-i)^k = -i^k$, donc dans la somme précédente, il ne reste que les k pairs, et lorsque k pair, en écrivant $k = 2j$, on a : $i^k + (-i)^k = i^{2j} + (-i)^{2j} = (i^2)^j + ((-i)^2)^j = (-1)^j + (-1)^j = 2(-1)^j$. On a donc :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{j=0}^{n} 2(-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

et on obtient alors le DL de $\cos(x)$ au voisinage de 0.

Remarque :

En pratique pour obtenir le *DL* de cos en 0 :
- On écrit le DL de e^x : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est paire : $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- On rajoute une alternance de signes : $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Proposition 10

On a donc : $\boxed{\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$ *et en particulier :* $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}}$.

9.1.4 Etude de la fonction sinus

Proposition 11
La fonction sin*, donnée par* $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sin'(x)=\cos(x)}$$

Démonstration :

sin est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Dee plus : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin'(x)=\dfrac{ie^{ix}-(-i)e^{-ix}}{2i}=\dfrac{i}{2i}(e^{ix}+e^{-ix})=\dfrac{1}{2}(2\cos(x))=\cos(x)$.

Proposition 12
La fonction sin *admet un Développement Limité de tout ordre en* 0 *qui est :*

$$\boxed{\sin(x)=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

Remarques :

R 1 – En pratique pour obtenir le DL de sin en 0 :
- On écrit le DL de e^x : $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est impaire : $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$
- On rajoute une alternance de signes : $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

R 2 – En particulier, remarquons que $\sin(x)=x+o\left(x^2\right)$, donc $\boxed{\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x}$.

9.1.5 Etude de la fonction tangente

Proposition 13
La fonction tan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur son ensemble de définition et :*

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\},\ \boxed{\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)}$$

Démonstration :

Puisque sin et cos sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, en notant $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a :

$$\forall x\in D,\ \tan'(x)=\frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2(x)}\\ 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)\end{cases}$$

Remarques :

R 1 – Puisque $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$ et que $\cos(x)\underset{x\to 0}{\sim}1$, on a donc $\boxed{\tan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x}$

R 2 – La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$, donc elle admet un DL de tout ordre en 0, mais ce DL est compliqué, il n'y a pas de formule explicite pour le coefficient devant x^n. Il faut le faire à la main en faisant le quotient des DL de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

9.2 Fonctions circulaires réciproques

9.2.1 Fonction Arcsin

Définition 14

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2) = [-1,1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arcsinus**, notée Arcsin.

$$\boxed{\text{Arcsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

Remarques :

R 1 – Puisque sin et Arcsin sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x, \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

R 2 – Puisque sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction Arcsin est également strictement croissante sur $[-1,1]$

R 3 – On a pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 15

La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ uniquement sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction sin est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et que $\sin' = \cos$, on sait que :

$$\text{Arcsin dérivable en } \sin(a) \iff \sin'(a) \neq 0 \iff \cos(a) \neq 0 \iff a \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ainsi Arcsin est dérivable sur tout $[-1,1]$ sauf en $\sin(-\pi/2) = -1$ et en $\sin(\pi/2) = 1$, autrement dit, Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 16

Puisque la fonction Arcsin est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{Arcsin(x)}{x} = 1} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{Arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

9.2.2 Fonction Arccos

Définition 17

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ vers $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arccosinus**, notée Arccos.

$$\boxed{\text{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]}$$

Remarques :

R 1 – Puisque cos et Arccos sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x, \qquad \forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

R 2 – Puisque cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction Arccos est également strictement décroissante sur $[-1, 1]$

R 3 – Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}(x))} = \boxed{\sqrt{1 - x^2}}$.

Proposition 18

La fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ uniquement sur $]-1, 1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction cos est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $\cos' = -\sin$, on sait que :

$$\text{Arccos dérivable en} \quad \cos(a) \iff \cos'(a) \neq 0 \iff -\sin(a) \neq 0 \iff a \notin \{0, \pi\}$$

Ainsi Arccos est dérivable sur tout $[-1, 1]$ sauf en $\cos(0) = 1$ et en $\cos(\pi) = 1$, autrement dit, Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = (\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos'(\cos^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Remarque :

On peut également obtenir un DL de Arccos(x) (ou de Arcin(x)) en 0 en remarquant que :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}(-x^2)^2 + \cdots$$

et en prenant la primitive, avec la bonne constante, on obtient un DL de Arcsin(x) ou de Arccos(x).
Puisque $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient par exemple que :

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

9.2.3 Fonction Arctan

Définition 19

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\left]\lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan(x),\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)\right[=]-\infty,+\infty[$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arctangente**, notée Arctan.

$$\boxed{\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

Remarques :

R 1 – Puisque tan et Arctan sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \tan(\text{Arctan}(x))=x,\qquad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \text{Arctan}(\tan(x))=x$$

R 2 – Puisque tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arctan est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Proposition 20

La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ e sur $\mathbb{R}$. De plus $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad \text{Arctan}'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}}$.

Démonstration :

Puisque la fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}, \tan'(x)=1+\tan^2(x)\neq 0$, on est certain que Arctan est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \text{Arctan}'(x)=(\tan^{-1})'(x)=\frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))}=\frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))}=\frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 21

La fonction Arctan admet pour limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arctan}(x)=-\dfrac{\pi}{2}}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x)=\dfrac{\pi}{2}}$.

Sa courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales d'équations $y=-\dfrac{\pi}{2}$ *et* $y=\dfrac{\pi}{2}$.