CHAPITRE 5

Nombres réels et fonctions

5.1 L'ensemble des réels

5.1.1 Relation d'ordre

Remarques :

R 1 – L'ensemble $\mathbb{R}$ est non vide et ses éléments sont appelés les **nombres réels**.

R 2 – L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$ (réflexivité)
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$ (transitivité)
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a forcément soit $x \leqslant y$ soit $y \leqslant x$, on dit que l'**ordre est total** sur $\mathbb{R}$.
- La relation $\leqslant$ est compatible avec $+$:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \underline{\text{si}}\ a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d,\ \underline{\text{alors}}\ a + c \leqslant b + d$$

- La relation $\leqslant$ est compatible avec la multiplication par un réel **positif** :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \geqslant 0, \qquad \underline{\text{si}}\ a \leqslant b\ \underline{\text{alors}}\ \lambda a \leqslant \lambda b$$

R 3 – Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow -a \geqslant -b$$

R 4 – Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\text{si}\ \ a \leqslant b \quad \text{et } c < d,\ \underline{\text{alors}}\ a + c < b + d$$

R 5 – Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\text{si}\ \ 0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d,\ \underline{\text{alors}}\ 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

R 6 – Pour tous réels a et b, on a :

$$ab > 0 \quad \Longleftrightarrow (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)$$

5.1.2 Valeur absolue d'un réel

Définition 1

Soit x un réel. On appelle **valeur absolue de x**, le réel noté $|x|$, défini par : $\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Remarques :

R 1 – Pour tout réel x, $|x|$ désigne la partie numérique du réel x, c'est-à-dire la valeur de x sans son éventuel signe

R 2 – Pour tout réel x, on a : $|x| = \max(x,\ -x)$.

R 3 – Pour tout réel x, on a : $|x| = 0 \iff x = 0$.

R 4 – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| = a \iff \quad x = a$ ou $x = -a$.

R 5 – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.

Proposition 2

1. *Soient a et b deux réels. On a :* $\left|a \times b\right| = |a| \times |b|$.
2. *Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On a :* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. *Soit x un réel. On a :* $|x|^2 = \left|x^2\right| = x^2$.
   Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|x^n\right| = |x|^n$.
4. *Pour tous réels a et b, on a :* $a^2 \leqslant b^2 \iff |a| \leqslant |b|$.
5. *Pour tout réel x, on a :* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Théorème 3 ***Inégalité triangulaire***

Pour tous réels x et y, on a :

$$\boxed{\left|x+y\right| \leqslant \left|x\right| + \left|y\right|}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\left(|x+y|\right)^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 &= |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ &\leqslant |x|^2 + 2|x|.|y| + |y|^2 = \left(|x| + |y|\right)^2\end{aligned}$$

On a donc $\left(|x+y|\right)^2 \leqslant \left(|x| + |y|\right)^2$ et puisque $|x+y|$ est positif et que $|x| + |y|$ est positif, on en déduit que :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Remarque :

On peut généraliser cette inégalité :
Pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a : $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,autrement dit :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

5.1.3 Partie entière d'un réel

Définition 4

La **partie entière d'un réel** x est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. On la note $\mathrm{Ent}(x)$. On a donc par définition, pour tout réel x :

$$\boxed{\mathrm{Ent}(x) \leqslant x < \mathrm{Ent}(x)+1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{x-1 < \mathrm{Ent}(x) \leqslant x}$$

Remarque :

Attention, la partie entière ne correspond pas forcément au "chiffre se trouvant avant la virgule", cela ne marche que pour les nombres positifs. On a par exemple : $\mathrm{Ent}(2.56) = 2$ et $\mathrm{Ent}(-4.86541) = -5$.

5.2 Fonctions réelles

5.2.1 Définitions

Définition 5

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$.

On dit que f est une **fonction de I dans J** si tout élément x de I a **au plus une image dans J**.

On appelle alors **Domaine de définition** de la fonction f le sous-ensemble D de I constitué par tous les éléments de I qui ont une image par f, autrement dit tous les x de I tels que $f(x)$ existe.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'on restreint une fonction à son domaine de définition, on obtient une application. On confondra donc en général les deux vocabulaires par abus de langage.

R 2 – Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, on peut alors créer une combinaison linéaire de f et g, une fonction produit, une fonction inverse parfois :
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$.
- $\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$.
- $\forall x \in I,\ \text{ si } g(x) \neq 0,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.2.2 Symétries

Définition 6

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que :
- f est **paire** si : $(\forall x \in D,\ -x \in D)$ et $\left(\boxed{\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)}\right)$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est **impaire** si : $(\forall x \in D,\ -x \in D)$ et $\left(\boxed{\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)}\right)$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque :

La courbe peut admettre **un axe de symétrie** d'équation $x = a$, ou alors un **point de symétrie** $\Omega(a, b)$.
Méthode pour rechercher une éventuelle symétrie :
L'ensemble D doit être symétrique par rapport à a. De plus, si pour tout h réel tel que $a + h \in D$, on a :
- $f(a+h) = f(a-h)$, alors la courbe repr. de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- $f(a+h) + f(a-h) = 2b$, alors la courbe repr. de f est symétrique par rapport au point $\Omega(a, b)$.

5.2.3 Périodicité

Définition 7

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et soit T un réel. On dit que f est **T-périodique** si :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \in D \iff x+T \in D$
- $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$

5.2.4 Fonctions monotones

Définition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **strictement croissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
- f est **strictement décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.

5.2.5 Fonctions majorées et minorées

Définition 9

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur D** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$
- f est **minorée sur D** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$.
- f est bornée sur D si f est majorée et minorée sur D.

Remarque :

> En particulier, lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est **positive**.
> Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est **négative**.

Définition 10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un majorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = M$
- On dit que M est un **minimum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un minorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = m$

Définition 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est une fonction majorée sur I, alors l'ensemble des majorants de f admet un plus petit élément, appelé la **borne supérieure de f**. On le note : $\sup\limits_{x \in I} f(x)$
- Si f est une fonction minorée sur I, alors l'ensemble des minorants de f admet un plus grand élément, appelé la **borne inférieure de f**. on le note : $\inf\limits_{x \in I} f(x)$.

5.3 Fonctions usuelles

5.3.1 Fonctions polynomiales

Définition 12

Une fonction f est dite **polynomiale**, de degré n, si elle s'écrit :

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

avec $a_n \neq 0$ et $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Exemples :

E 1 – La **fonction nulle** définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0}$$

est une fonction polynomiale particulière dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, c'est une fonction polynomiale de degré $-\infty$.

E 2 – Les **fonctions constantes** sont des fonctions polynomiales :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Leur degré est nul si $a \neq 0$ et égal à $-\infty$ si $a = 0$.

E 3 – Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les **fonctions affines** du type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

Leur courbe représentative est une droite non verticale. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** et b est **l'ordonnée à l'origine**.

E 4 – Les fonctions polynomiales de degré 2 sont les fonctions du type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c}, \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Leur courbe représentative est une **parabole** d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Remarque :

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\Delta > 0$, alors :
  - f s'annule deux fois, en $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - On peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  - f est du signe de a à l'extérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, alors :
  - f s'annule une seule fois, en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
  - On peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$
  - f est du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, alors :
  - f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
  - f est du signe de a et ne s'annule jamais.

5.3.2 Fonction racine carrée

Définition 13

Soit $a \geqslant 0$. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$. La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$.

Remarques :

R 1 – Pour $a \geqslant 0$, on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

R 2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

R 3 – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

R 4 – Si $xy \geqslant 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$

R 5 – La fonction racine carrée est définie et croissante sur $[0, +\infty[$.

R 6 – Pour tout $x > 0$, on peut aussi écrire que $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

5.3.3 Fonction inverse

Définition 14

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Remarques :

R 1 – La fonction inverse est définie et impaire sur $\mathbb{R}^*$.

R 2 – On dit que la courbe de la fonction inverse est une **hyperbole**.

R 3 – La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{ll} \text{si } 0 < a \leqslant b & \text{alors } 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} \\ \text{si } a \leqslant b < 0 & \text{alors } \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} < 0 \\ \text{si } a < 0 < b & \text{alors } \dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b} \end{array}$$

R 4 – La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! cela n'a pas de sens puisque $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

5.3.4 Fonction logarithme népérien

Définition 15

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarques :

R 1 – Par définition, la fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et $\boxed{\ln(1)=0}$.

R 2 – La fonction ln est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\boxed{\forall x>0, \quad \ln'(x)=\dfrac{1}{x}}$.

R 3 – La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

R 4 – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a)=\ln(b) \iff a=b \quad \text{et} \quad \ln(a)<\ln(b) \iff a<b$ et :

$$\boxed{\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$$

R 5 – Si $xy>0$, alors $\ln(xy)=\ln|x|+\ln(|y|)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln|x|-\ln|y|$.

R 6 – Pour $a>0$ et x réel $\boxed{\ln(a^x)=x\ln(a)}$. En particulier, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

5.3.5 Fonction exponentielle

Définition 16

La fonction $\ln:\mathbb{R}^{+*}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction bijective : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{+*}$. On la note $x\mapsto e^x$ ou $x\mapsto\exp(x)$.

Remarques :

R 1 – La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.

R 2 – Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \exp'(x)=\exp(x)}$

R 3 – La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

R 4 – Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\boxed{y=e^x \iff x=\ln(y)}$.

R 5 – Pour $x>0$, $e^{\ln(x)}=x$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\ln(e^x)=x$.

R 6 – On a $\boxed{\ln(e)=1}$, $\boxed{e^1=e\simeq 2.718}$ et $\boxed{e^0=1}$.

R 7 – Pour tous réels a et b, $e^a=e^b \iff a=b$ et $e^a<e^b \iff a<b$.

R 8 – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)}$ et $\boxed{\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}}$

R 9 – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{e^{ab}=(e^a)^b=\left(e^b\right)^a}$

R 10 – Pour tout $a>0$, on a $\boxed{a^x=e^{x\ln(a)}}$.

5.3.6 Fonctions puissance

Définition 17

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction "puissance α" :

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

est définie pour tout $x > 0$.

Remarques :

R 1 – Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$: c'est un cas particulier.

R 2 – Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

R 3 – Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$ et par convention, $x^0 = 1$

R 4 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, on a : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

R 5 – Pour tous x et y strictement positifs, on a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

R 6 – Si on peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, alors pour tout $x > 0$,

$$x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$