

# Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

## 18.1 Changements de bases

### 18.1.1 Matrice de passage entre deux bases

#### Définition 1

Soit  $E$  un espace vectoriel de dim.  $n$  et soient  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$** , que l'on note  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ , la matrice qui exprime en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

#### Remarque :

Une matrice de passage est en fait la matrice de l'application linéaire  $\text{Id}_E$  qui va de  $E$  dans  $E$ , exprimée dans les bases  $\mathcal{B}'$  (départ) et  $\mathcal{B}$  (arrivée).

#### Exemples :

- E1** – Soient  $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2)$  une autre base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
 Quelle est la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  ?  
 Quelle est la matrice de passage  $Q$  de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  ?

Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

- On a  $1 = 1 + 0.X + 0.X^2$ , donc  $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

- On a  $X - 1 = -1 + 1.X + 0.X^2$ , donc on complète :  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

- On a  $(X - 1)^2 = 1 - 2X + X^2$ , donc on complète :  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base  $\mathcal{B}_1$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

- On a  $1 = 1 + 0.(X - 1) + 0.(X - 1)^2$ , donc  $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

- On cherche  $a, b, c$  tels que  $X = a + b(X - 1) + c(X - 1)^2$ , donc on veut

$$X = (a - b + c) + (b - 2c)X + cX^2 \iff \begin{cases} c = 0 \\ b - 2c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc  $X = 1 + (X - 1) + 0.(X - 1)^2$ . Ainsi, on complète :  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

- On cherche  $a, b, c$  tels que  $X^2 = a + b(X - 1) + c(X - 1)^2$ , donc on veut

$$X^2 = (a - b + c) + (b - 2c)X + cX^2 \iff \begin{cases} c = 1 \\ b - 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc  $X^2 = 1 + 2(X - 1) + 1.(X - 1)^2$ . Ainsi, on complète :  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  est  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Proposition 2

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  est une matrice inversible, et de plus  $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

### Remarques :

**R1** – En effet, on peut remarquer dans l'exemple précédent qu'on a bien  $PQ = QP = I_3$ .

**R2** – La plupart du temps, pour déterminer  $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$ , on utilisera plutôt la méthode du pivot de Gauss sur la matrice  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  plutôt que de déterminer la matrice  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$  en revenant à la définition.

### 18.1.2 Changement de coordonnées pour un vecteur

#### Proposition 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soit  $\vec{u} \in E$ .  
 On note  $X$  la matrice colonne représentant le vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
 On note  $X'$  la matrice colonne représentant le vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .  
 On note  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors,

$$X = PX'$$

#### Remarque :

Pour retenir de la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\begin{array}{c} X \\ \mathcal{B} \end{array} = \begin{array}{cc} P & X' \\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{B}' \end{array}$$

#### Exemple :

Considérons la base  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}_2[X] : (1, X - 1, (X - 1)^2)$ .  
 Calculer les coordonnées du polynôme  $R(X) = 4X^2 - 3X + 7$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

Dans la base canonique  $\mathcal{B}_1$ , on a facilement les coordonnées de  $R(X) : \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

On sait donc d'après la proposition précédente que les coordonnées de  $R(X)$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  sont données par

$$P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

### 18.1.3 Changement de bases pour une application linéaire

#### Proposition 4

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  
 Notons  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .  
 Notons  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .  
 On note  $A$  la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .  
 On note  $A'$  la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ .  
 Alors,

$$A' = P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} A P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

#### Remarque :

Pour retenir la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\begin{array}{c} A' \\ \mathcal{C}'\mathcal{B}' \end{array} = \begin{array}{ccc} P & A & P \\ \mathcal{C}'\mathcal{C} & \mathcal{C}\mathcal{B} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \end{array}$$

Il faut toujours lire de la droite vers la gauche, comme pour une application

### 18.1.4 Changement de base pour un endomorphisme

#### Proposition 5

On considère  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases d'un espace vectoriel  $E$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .  
 On note  $M$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $M'$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .  
 On note  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .  
 Alors,

$$M = PM'P^{-1}$$

#### Exemple :

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + (6a + 4b + 3c)$$

On garde encore les notations précédentes :  $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$  et  $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ .  
 Déterminons la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ , puis la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

Pour déterminer la matrice  $M$ , il nous faut calculer les coordonnées de  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^2)$  dans la base canonique.  
 On a :  $f(1) = 3$ ,  $f(X) = -X + 4$  et  $f(X^2) = X^2 - 4X + 6$ . Ainsi, la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a calculé  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  et son inverse :  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Donc d'après la formule de changement de base, la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  est :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 18.1.5 Matrices équivalentes

#### Définition 6

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille :  $n$  lignes et  $p$  colonnes.  
 On dit que  **$A$  et  $B$  sont équivalentes** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}), / A = PBQ$$

#### Proposition 7

Deux matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire  $f$ , dans des bases différentes.

#### Remarque :

Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur une matrice (échange de lignes, échange de colonnes, ...), en réalité on multiplie la matrice par une matrice inversible à gauche ou à droite (voir TD). Ainsi, lorsqu'on fait la méthode du pivot de Gauss, les matrices sont bien équivalentes.

### 18.1.6 Matrices semblables

#### Définition 8

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont **semblables** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / A = PBP^{-1}$$

#### Proposition 9

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

#### Proposition 10

Soient  $M$  et  $M'$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Il existe donc une matrice inversible  $P$  telle que  $M = PM'P^{-1}$ . Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = P(M')^k P^{-1}$$

#### Démonstration :

Démontrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(k) : "M^k = P(M')^k P^{-1}"$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  
 $k = 0$ . On a  $M^0 = I$  et  $P(M')^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est bien vraie.

Soit  $k \geq 0$  fixé. Supposons que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie. Alors

$$M^{k+1} = M^k M = P(M')^k P^{-1} \times PM'P^{-1} = P(M')^{k+1} P^{-1}$$

Ainsi, si  $\mathcal{P}(k)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie également.

Ainsi, on a bien pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = P(M')^k P^{-1}$ .

#### Remarque :

Ainsi, si on sait bien calculer  $(M')^k$ , on peut en déduire la valeur de  $M^k$ . Ce sera donc un avantage considérable si on arrive à montrer que  $M$  est semblable à une matrice dont on sait facilement calculer les puissances, par exemple les matrices diagonales.

#### Exemple :

Reprenons toujours notre exemple fil rouge. Nous avons montré que  $M = P^{-1}M'P$  avec  $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Puisque  $M'$  est diagonale, on a donc que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(M')^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et donc puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = P^{-1}(M')^k P$ , après calculs on trouve l'expression de  $M^k$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k + (-1)^{k+1} & 3^k + 2(-1)^{k+1} + 1 \\ 0 & (-1)^k & 2(-1)^k - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 18.2 Valeurs propres et vecteurs propres

On désignera à présent par  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

Le but à présent est, si on se donne un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  de trouver une "bonne base"  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $f$  soit la plus simple possible, c'est-à-dire diagonale. Autrement dit, on aimerait avoir une base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et des scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\text{mat}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, il faudrait que ces vecteurs et ces scalaires vérifient

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n$$

### 18.2.1 Définitions

#### Définition 11

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de l'endomorphisme  $f$  s'il existe un vecteur  $\vec{x} \in E$  non nul tel que

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Un vecteur  $\vec{x}$  non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelé un **vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée.

On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de la matrice  $A$  s'il existe une matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nulle telle que

$$AX = \lambda X$$

Une matrice colonne  $X$  non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelée un **vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$** .

#### Remarque :

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  est appelé **spectre de  $f$**  et est noté  $Sp(f)$ .

De même, l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée  $A$  est appelé **spectre de  $A$**  et est noté  $Sp(A)$ .

#### Exemples :

**E1** – Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P$$

Calculons  $f((X-1)^2)$  et déduisons-en une valeur propre de  $f$ .

$$f((X-1)^2) = 2(X-1) + (X-1)^2 = 3(X-1)$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de  $f$  et le polynôme  $(X-1)^2$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

**E2** – Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calculons  $AX$  et déduisons-en une valeur propre de  $A$ .

$$AX = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de  $A$  et  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

### Proposition 12

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . On pose

$$E_\lambda(f) = \{ \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$$

Alors  $E_\lambda(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  que l'on appelle **sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$** .

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . On pose

$$E_\lambda(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X \}$$

Alors  $E_\lambda(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  que l'on appelle **sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$** .

### Remarques :

**R1** – Le sous-espace propre associé à une valeur propre de  $f$  est donc l'ensemble de tous les vecteurs propres de  $f$ , auquel on rajoute le vecteur nul.

**R2** – Le sous-espace propre associé à une valeur propre de  $A$  est donc l'ensemble de tous les vecteurs propres de  $A$ , auquel on rajoute la matrice colonne nulle.

### Démonstration :

Prouvons-le pour  $E_\lambda(f)$  : montrons que c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- $E_\lambda(f) \subset E$  par définition.
- $\vec{0} \in E_\lambda(f)$  puisque  $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$ , donc  $E_\lambda(f) \neq \emptyset$ .
- Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E_\lambda(f)$  : on a  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$  et  $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ .  
Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Montrons que  $\alpha \vec{u} + \vec{v} \in E_\lambda(f)$ .

$$f(\alpha \vec{u} + \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \alpha(\lambda \vec{u}) + (\lambda \vec{v}) = \lambda(\alpha \vec{u} + \vec{v})$$

donc  $\alpha \vec{u} + \vec{v} \in E_\lambda(f)$ . Ainsi,  $E_\lambda(f)$  est bien stable par combinaison linéaire.

Ainsi, on a montré que  $E_\lambda(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Remarque :

On a

$$E_\lambda(f) = \{ \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \} = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$$

De même,

$$E_\lambda(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X \} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

## 18.2.2 Propriétés

### Proposition 13

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors :

1.  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .
2. un vecteur  $\vec{u} \in E$  est un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$  si et seulement si la matrice colonne  $X$  associée à  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

### Remarque :

On voit donc que chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice associée dans une base fixée revient au même

### Proposition 14

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f \iff f - \lambda Id_E$  non bijective.  
En particulier, 0 est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $f$  n'est pas bijective.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A \iff A - \lambda I_n$  non inversible.  
En particulier, 0 est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A$  n'est pas inversible.

### Remarques :

#### R1 – Méthode pour déterminer les valeurs propres d'une matrice.

Pour chercher les valeurs propres d'une matrice  $A$ , on regarde donc la matrice  $A - \lambda I_n$  pour n'importe quelle valeur de  $\lambda$  et on la triangularise pour regarder son rang.

Toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles cette matrice n'est pas inversible (i.e. le rang est différent de  $n$ ) fournissent les valeurs propres de la matrice  $A$ .

#### R2 – Si une matrice est triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux

### Exemple :

Déterminons les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1-2\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 + (2+\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & -\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_2 + C_3 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice  $A - \lambda I_3$  n'est pas inversible si  $-\lambda - 1 = 0$  ou si  $-\lambda - \lambda^2 = 0$ , c'est-à-dire si  $\lambda = -1$  ou  $\lambda = 0$ . La matrice  $A$  admet donc deux valeurs propres qui sont 0 et  $-1$ .

### 18.2.3 Vecteurs propres et sommes directes

#### Théorème 15

#### Familles libres de vecteurs propres

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres distinctes de  $f$ .

Soient  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$  des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

Alors, la famille  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  est une famille libre de  $E$ .

#### Démonstration :

Raisonnons par récurrence sur le nombre  $p$  de valeurs propres.

$p = 1$ . Supposons qu'on ait un seul vecteur propre  $\vec{u}_1$ , alors la famille  $(\vec{u}_1)$  est bien une famille libre puisque  $\vec{u}_1$  est non nul.

Soit  $p \geq 1$ . Supposons que la propriété soit vraie au rang  $p$ , i.e. si on a  $p$  vecteurs propres pour  $p$  valeurs propres différentes, alors ils forment une famille libre de  $E$ .

Considérons une famille de vecteurs propres  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p+1})$ .

Soient  $a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_{p+1} \vec{u}_{p+1} = \vec{0} \quad (1)$$

On applique  $f$  à cette égalité, on obtient :

$$a_1 f(\vec{u}_1) + a_2 f(\vec{u}_2) + \dots + a_{p+1} f(\vec{u}_{p+1}) = \vec{0}$$

soit

$$a_1 \lambda_1 \vec{u}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + a_{p+1} \lambda_{p+1} \vec{u}_{p+1} = \vec{0} \quad (2)$$

Alors,  $\lambda_{p+1}(1) - (2)$  donne :

$$\sum_{k=1}^p (\lambda_{p+1} - \lambda_k) a_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

Comme la famille  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  est libre, on a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k (\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$$

Or, on sait que  $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$ , donc on a bien  $a_k = 0$ .

En réinsérant ces  $a_k$  dans l'égalité du départ, on obtient également  $a_{p+1} = 0$ .

Ainsi, la propriété est encore vraie au rang  $p + 1$ .

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

#### Proposition 16

1. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , les valeurs propres distinctes de  $f$ . Alors les sous-espaces propres correspondants sont tous en somme directe, i.e.  $E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f) + \dots + E_{\lambda_k}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(f)$ .

En particulier, on a :  $\dim(E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f) + \dots + E_{\lambda_k}(f)) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f))$  et donc :

$$\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leq n$$

2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  admet donc au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

### 18.2.4 Polynômes annulateurs

#### Définition 17

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On a  $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $P(f)$  l'endomorphisme défini par  $P(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_p f^p$ .

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $P(A)$  la matrice définie par  $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p$

#### Définition 18

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est un **polynôme annulateur de  $f$**  si  $P(f) = 0$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est un **polynôme annulateur de  $A$**  si  $P(A) = 0$ .

#### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ . Montrons que  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Donc  $P$  est bien un polynôme annulateur de  $A$ .

#### Théorème 19

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P$  un polynôme annulateur de  $f$ . Toute valeur propre de  $f$  est une racine de  $P$ .

#### Démonstration :

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $f$ . Notons  $\vec{u}$  un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$ , on a donc  $\vec{u} \neq \vec{0}$  en particulier. On a donc  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ , on a également  $f^2(\vec{u}) = f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda^2 \vec{u}$  et par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^k(\vec{u}) = \lambda^k \vec{u}$$

Ainsi, si  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  est un polynôme annulateur de  $f$ , alors

$$P(f)(\vec{u}) = \sum_{k=0}^p a_k f^k(\vec{u}) = \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k \vec{u} = \left( \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k \right) \vec{u} = (P(\lambda)) \vec{u}$$

Or,  $P(f)(\vec{u}) = \vec{0}$  puisque  $P(f) = 0$ . Ainsi,  $(P(\lambda)) \vec{u} = \vec{0}$  et donc  $P(\lambda) = 0$  puisque  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . On a donc bien montré que  $\lambda$  est une racine de  $P$ .

**Remarque :**

La réciproque est fautive : toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres. La connaissance d'un polynôme annulateur ne nous donne donc que des possibilités de valeurs propres.

**Exemple :**

Déterminons les valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On a montré que  $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$  était un polynôme annulateur de  $A$ . Or,

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$$

On sait donc que les valeurs propres possibles sont parmi l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$ . Il nous faut donc à présent vérifier si oui ou non 0, 1 et 2 sont valeurs propres ou non.

•

$$AX = 0X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Il n'y a pas de  $X$  non nul qui peut être solution de  $AX = 0X$ , donc 0 n'est pas valeur propre.

•

$$AX = 1X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x \\ y - 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff z = 0$$

Par exemple  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  convient. Donc 1 est une valeur propre de  $A$ .

-

$$AX = 2X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 2x \\ y - 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Le vecteur  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient : 2 est bien une valeur propre de  $A$ .

Ainsi, les valeurs propres de la matrice  $A$  sont 1 et 2.

**Remarque :**

Il faut savoir redémontrer dans les exercices que les valeurs propres sont des racines du polynôme annulateur

**Exemple :**

Prenons  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 - 3f + 2Id = 0$ . Quelles sont les valeurs propres possibles de  $f$  ?

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $f$ . Alors il existe  $\vec{x} \in E$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}_E$  tel que  $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ . On a alors :

$$(f^2 - 3f + 2Id) = 0 \implies (f^2 - 3f + 2Id)(\vec{x}) = \vec{0} \implies \lambda^2 \vec{x} - 3\lambda \vec{x} + 2\vec{x} = \vec{0} \implies (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\vec{x} = \vec{0}$$

et puisque  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , on a nécessairement  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , autrement dit,  $\lambda = 2$  ou  $\lambda = 1$ .

Les deux seules valeurs propres possibles de  $f$  sont donc 1 ou 2.

## 18.3 Diagonalisation

### 18.3.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

#### Définition 20

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  
On dit que  $f$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est une **matrice diagonalisable** si  $A$  est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale} / A = PDP^{-1}$$

#### Remarques :

- R1** – Un endomorphisme  $f$  est donc diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.
- R2** – La matrice  $D$  contient les valeurs propres de la matrice  $A$ , et la matrice  $P$  contient les vecteurs propres correspondants dans le même ordre.

### 18.3.2 Théorèmes de réduction

#### Théorème 21

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  toutes les valeurs propres distinctes de  $f$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable} &\iff E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f) \\ &\iff \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n \end{aligned}$$

#### Remarque :

De même, une matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut  $n$

#### Théorème 22

*Cas particulier :  $n$  valeurs propres*

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $A$  est diagonalisable.

#### Théorème 23

*Cas particulier : une seule valeur propre*

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f = \lambda Id$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A = \lambda I_n$ .