CHAPITRE 14

Convergence des suites numériques

14.1 Suites usuelles

14.1.1 Rappels

Définition 1

Une suite (u_n) est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite (u_n) est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$.
Une suite (u_n) est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.
Une suite (u_n) est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Remarques :

- **R 1** – Pour étudier la monotonie, on regarde si "$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$" ou si "$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$"
- **R 2** – Si on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, alors on peut aussi utiliser les critères suivants :

$$(u_n) \text{ croissante } \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

$$(u_n) \text{ décroissante } \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

Définition 2

Une suite (u_n) est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
Le réel M est alors appelé un **majorant** de la suite (u_n).

Une suite (u_n) est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
Le réel m est alors appelé un **minorant** de la suite (u_n).

14.1.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 3

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Lorsque $a = 1$, on dit qu'on a une suite **arithmétique**.
Lorsque $b = 0$, on dit qu'on a une suite **géométrique**.

Proposition 4 ***Suites arithmétiques***

Soit r un réel et soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

et la somme de termes consécutifs de (u_n) vaut : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \dfrac{(u_p + u_n) \times (n - p + 1)}{2}$.

Exemple :

Un cas particulier est : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 5 ***Suites géométriques***

Soit q un réel et soit (u_n) une suite géométrique de raison q, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

et la somme de termes consécutifs de (u_n) vaut : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & si\ q \neq 1 \\ (n - p + 1)u_p & si\ q = 1 \end{cases}$

Exemple :

Un cas particulier est : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Remarque :

Méthode générale pour les suites arithmético-géométriques.
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 1$. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

1. On cherche un réel x tel que $\boxed{x = ax + b}$ (il suffit de prendre $x = \dfrac{b}{1 - a}$, qui existe puisque $a \neq 1$).
2. On pose (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - x$.
3. La suite (v_n) est alors géométrique, de raison a.
4. On peut obtenir alors une forme explicite pour v_n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. On en déduit alors une forme explicite de $u_n = v_n + x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

14.1.3 Suites récurrentes linéaires doubles

Définition 6

On dit qu'une suite (u_n) est **récurrente linéaire double** s'il existe deux réels α, β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

Théorème 7

A la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

*on associe l'**équation caractéristique** :*

$$(*) \quad : \quad \boxed{x^2 = \alpha x + \beta}$$

On note Δ le discriminant de cette équation.

- *Si $\Delta > 0$, alors l'équation $(*)$ admet deux solutions réelles x_1 et x_2. Alors :*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda (x_1)^n + \mu (x_2)^n}$$

- *Si $\Delta = 0$, alors l'équation $(*)$ admet une racine double x_0. Alors :*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda (x_0)^n + \mu n (x_0)^n}$$

- *Si $\Delta < 0$, alors l'équation $(*)$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$. Alors*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)}$$

Dans tous les cas, les constantes λ et μ sont déterminées à partir des valeurs de u_0 et u_1.

Exemples :

E 1 – Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique associée est $x^2 = 5x - 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0$.
On a donc : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.
Reste à trouver les valeurs de λ et μ.
On sait que $u_0 = \lambda 2^0 + \mu 3^0$ donc $1 = \lambda + \mu$. On sait que $u_1 = \lambda 2^1 + \mu 3^1$ donc $0 = 2\lambda + 3\mu$.
Ainsi $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2 + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ 2\mu = -2 \end{cases}$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.

E 2 – Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique associée est $x^2 = -2x - 4 \iff x^2 + 2x + 4 = 0$.
L'équation admet pour solutions les complexes $2j$ et $2j^2$: $2e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.
On a donc : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
Reste à trouver les valeurs de λ et μ.
On sait que $u_0 = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0)$ donc $1 = \lambda$. On sait que $u_1 = 2\left(\cos(2\pi/3) + \mu \sin(2\pi/3)\right)$ donc $0 = -\frac{1}{2} + \mu\sqrt{3}2$, donc $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \left(\cos\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

14.2 Comportement asymptotique d'une suite

14.2.1 Suites convergentes

Définition 8

Une suite (u_n) **converge** vers une limite réelle finie ℓ si u_n peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que n est pris suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur à un certain rang. Autrement dit :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Remarques :

- **R 1** – Avec la définition ci-dessus, l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite (u_n), sauf un nombre fini d'entre eux (jusqu'au rang N)]
- **R 2** – **Etudier la nature d'une suite** (u_n), c'est déterminer si cette suite est convergente ou non.
- **R 3** – Si une suite (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Définition 9

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Divergence vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

Divergence vers $-\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

Remarques :

- **R 1** – Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors la suite (u_n) est divergente, mais admet une limite (infinie).
- **R 2** – Une suite divergente est une suite qui :
  - soit admet une limite infinie
  - soit n'admet pas de limite

14.2.2 Opérations sur les limites

Ce sont les mêmes règles que pour les fonctions, concernant les sommes, les produits, les inverses de suites (voir Chapitre 06 sur les Limites de Fonctions)
On a les mêmes formes indéterminées également :

$$\boxed{\infty - \infty} \qquad \boxed{0 \times \infty} \qquad \boxed{\frac{0}{0}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

et les formes indéterminées implicites :

$$\boxed{1^{\infty}} \qquad \boxed{0^{\infty}} \qquad \boxed{\infty^{0}}$$

14.2.3 Composition des limites

Théorème 10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite de réels à valeurs dans I à partir d'un certain rang.

Soient $a, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \text{ et } \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

Théorème 11 ***Utilisation de la continuité***

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Proposition 12 ***Passage à la valeur absolue***

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

Remarque :

> Pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on peut donc aussi montrer que la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Proposition 13

Soit (u_n) une suite convergente vers 0. Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}-1}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^{\alpha}-1}{\alpha u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(u_n)}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(u_n)-1}{\frac{u_n^2}{2}} = 1} \quad \forall \alpha > 0, \beta > 0 \ \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^{\alpha}(\ln(u_n))^{\beta} = 0}$$

Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$. Alors pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha u_n}}{(u_n)^{\beta}} = +\infty} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(u_n))^{\alpha}}{(u_n)^{\beta}} = 0}$$

14.2.4 Inégalités, comparaison et encadrement

Théorème 14

Toute suite convergente est bornée.

Remarques :

R 1 – La réciproque est fausse

R 2 – Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que $\ell > m$, alors on a $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

R 3 – Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que $\ell < M$, alors on a $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

R 4 – Si (u_n) converge vers ℓ et que $m < \ell < M$, alors

$$\text{à partir d'un certain rang : } \ m < u_n < M$$

R 5 – Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec $\ell < \ell'$, alors

$$\text{à partir d'un certain rang : } \ u_n < v_n$$

Proposition 15

Si (u_n) est une suite positive (ou strictement positive) à partir d'un certain rang, et si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell \geqslant 0$.

Remarque :

Attention ! Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on n'a pas forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$. Une inégalité stricte devient toujours large après un passage à la limite.

Proposition 16 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes et si à partir d'un certain rang, on a toujours $u_n \leqslant v_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Théorème 17 ***Théorème de comparaison***

- *Si* $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant v_n \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Si* $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 18 ***Théorème d'encadrement***

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors la suite (v_n) est convergente et converge vers cette même limite ℓ.

Conséquences 19 ***Théorème d'encadrement avec la valeur absolue***

Si à partir d'un certain rang, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \qquad \text{et} \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Conséquences 20 ***Produit suite bornée / suite convergente vers 0***

Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite convergente vers 0, alors la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Démonstration :

Supposons que la suite (u_n) soit bornée. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k$.
Alors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_nv_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant k|v_n|$$

et la suite $(k|v_n|)$ converge vers 0 par hypothèse.
Donc par le théorème d'encadrement, on a bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n) = 0$.

14.2.5 Suites extraites

Définition 21

Une suite (v_n) est appelée une **suite extraite de la suite (u_n)** si elle est obtenue par une extraction infinie des termes de la suite (u_n).
Par exemple, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (u_n).

- La suite (u_{2n}) est la **suite extraite d'indices pairs** :

$$(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, \ldots)$$

- La suite (u_{2n+1}) est la **suite extraite d'indices impairs** :

$$(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, u_7, \ldots)$$

Théorème 22

Si une suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors toutes suite extraite de la suite (u_n) converge vers ℓ.

Théorème 23 ***CNS de convergence***

Une suite (u_n) converge une limite finie ℓ si et seulement si la suite d'indices pairs (u_{2n}) et la suite d'indices impairs (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers cette même limite.

Remarque :

Si deux suites extraites d'une même suite (u_n) n'ont pas la même limite, alors la suite (u_n) n'est pas convergente.

14.2.6 Le cas des suites monotones

Théorème 24 ***Théorème de la Limite Monotone***

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Remarque :

Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus petit des majorants de la suite (u_n) : c'est sa borne supérieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus grand des minorants de la suite (u_n) : c'est sa borne inférieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

14.2.7 Suites adjacentes

Définition 25

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si, à partir d'un certain rang :
- l'une est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Théorème 26

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration :

Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Remarquons pour commencer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$$

Puisque $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante, ayant pour limite 0, cela implique que cette suite est à termes négatifs, puisque 0 doit être un majorant de la suite $(u_n - v_n)$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Autrement dit, la suite (u_n) est croissante et majorée (par v_0), donc converge vers un réel ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc converge également, vers un réel ℓ'.
On a de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \begin{cases} 0 \text{ (par hypothèse)} \\ \ell - \ell' \end{cases}$$

Par unicité de la limite, on en déduit donc que $\ell = \ell'$ et donc (u_n) et (v_n) ont bien la même limite.

Théorème 27 ***Réels/Rationnels***

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels.

14.3 Comparaisons des suites numériques

14.3.1 Suites équivalentes

Définition 28

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes s'il existe une suite (w_n) telle que à partir d'un certain rang n_0 :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n w_n \qquad \text{avec } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque :

Autrement dit, si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on a :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Exemples :

E 1 – On connaît déjà des équivalents usuels, grâce aux limites usuelles :
Si (u_n) est une suite qui <u>converge vers 0</u>, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$

E 2 – Une suite polynômiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré

Proposition 29

Deux suites équivalentes ont la même limite, quand elles ont une limite

14.3.2 Suites négligeables

Définition 30

Une suite (u_n) est dite **négligeable devant une suite** (v_n) s'il existe une suite (w_n) telle que à partir d'un certain rang n_0 :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n w_n \qquad \text{avec } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (et on lit "(u_n) est un petit o de (v_n)")

Remarques :

R 1 – Autrement dit, si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on a :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

R 2 – On a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Proposition 31 ***Croissances comparées des suites usuelles***

En notant $u_n \underset{n\to+\infty}{<<} v_n$ pour $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on a : pour tous $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$,

$$n! \underset{n\to+\infty}{>>} e^{\alpha n} \underset{n\to+\infty}{>>} n^{\beta} \underset{n\to+\infty}{>>} (\ln(n))^{\gamma}$$

Remarque :

Si $0<\alpha<\beta$, on a $n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\beta})$

Exemple :

On a par exemple $2^n - 12n^2 - 3\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n-12n^2-3\ln(n)) = +\infty$.
En gros, déterminer un équivalent consiste à ne garder que le terme prépondérant et à supprimer tous les termes négligeables devant lui.

Proposition 32

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Si (v_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$, alors $(|v_n|)$ aussi.

Remarques :

R 1 – La relation d'équivalence "$\sim$" est :
- **symétrique** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- **transitive** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
- **stable par produit** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_nv'_n$.
- **stable par inverse** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si (v_n) ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
- **stable par passage à la valeur absolue** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$

ATTENTION, on n'additionne pas les équivalents, comme pour les fonctions.
On ne peut pas non plus composer les équivalents, par exemple par l'exponentielle.

R 2 – La relation de négligeabilité "o" est :
-
- **transitive** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
- **stable par produit** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_nv'_n)$.
- **stable par inverse** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si (u_n) et (v_n) ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Exemple :

Une limite à savoir refaire <u>parfaitement</u> : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x}$.
On a : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$. Or, on sait que $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{x}{n} = x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc par composition de limites (et surtout pas d'équivalents), $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x$

14.4 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 33

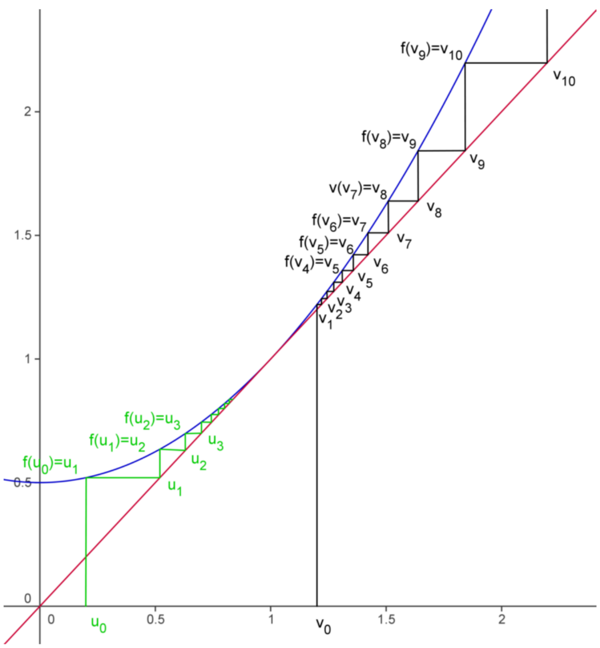
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On s'intéresse ici à une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Exemple :

Une suite arithmético-géométrique est de la forme $u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$

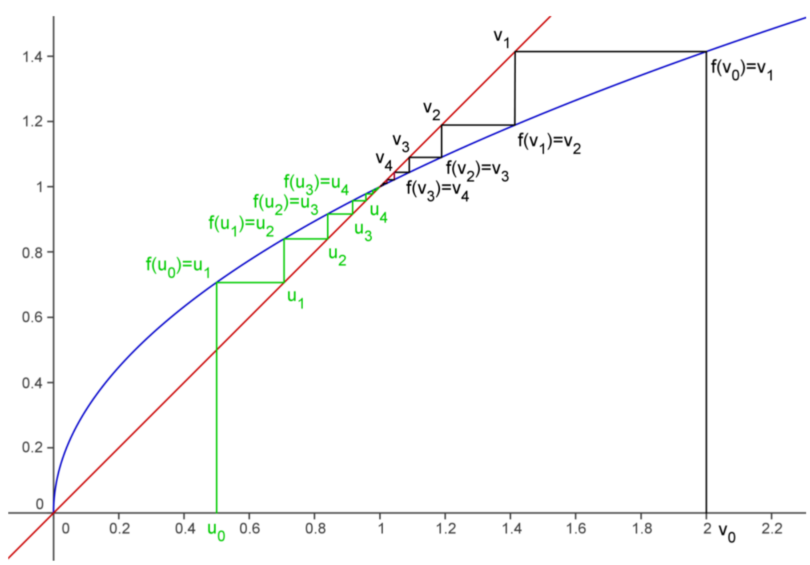
Remarque :

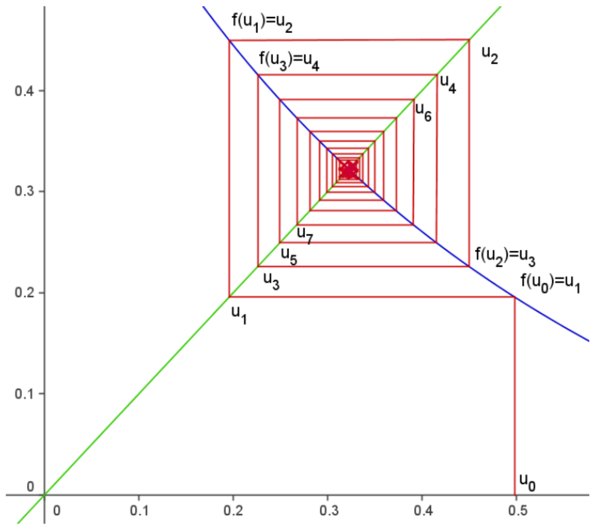
On peut souvent tracer la courbe de la fonction f et représenter la suite (u_n) sur ce graphique. Cela nous donne des informations (des conjectures) concernant la monotonie de la suite, les limites possibles, et son comportement en général.



Ci-contre, les suites définies par :
$\begin{cases} u_0 = 0.2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \end{cases}$
et
$\begin{cases} v_0 = 1.2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 1}{2} \end{cases}$

Ci-contre, les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ et
$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases}$





Ci-contre, la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{(u_n+1)^2} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Définition 34

On dit qu'une suite récurrente (u_n) définie par une relation : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est **bien définie** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in I$ (pour qu'on puisse bien calculer $f(u_n)$).

Remarque :

Le plus souvent, on peut le montrer par récurrence. Il suffit de trouver un bon intervalle I tel que $f(I) \subset I$. On dit que I est un **intervalle stable par f**.

Théorème 35 ***Théorème du point fixe***

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors on a nécessairement $f(\ell) = \ell$. Le réel ℓ est appelé un ***point fixe de f****.*

Remarque :

On sait donc que si la suite (u_n) converge, alors nécessairement elle converge vers un point fixe

Théorème 36 ***Méthode générale d'étude d'une suite récurrente***

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- *Si la fonction f est croissante sur l'intervalle I, alors la suite (u_n) sera monotone.*
- *Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle I, alors on étudie les suites extraites d'indices pairs (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui, elles, seront monotones.*

Remarque :

Dans certains cas, on peut utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis pour conclure sur la convergence d'une suite récurrente. Par exemple, si on montre à l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis que
$\exists k \in [0,1[\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$
où ℓ désigne un point fixe de f, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$, d'où par encadrement que (u_n) converge vers ℓ.