CHAPITRE 10

Calcul matriciel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 L'ensemble des matrices

10.1.1 Définitions

Définition 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes** tout tableau A de taille $n \times p$ contenant des scalaires (des nombres) du corps $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Remarque :

Quand on note un terme de la matrice :$a_{i,j}$,
- le premier indice i désigne l'**indice ligne**
- le second indice j désigne l'**indice colonne**

Définition 2

On note :
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des **matrices carrées** à n lignes et n colonnes.
  (On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **carrée d'ordre n**).
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à une ligne et p colonnes.
  On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est une **matrice ligne**.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.
  On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une **matrice colonne**.

Remarque :

Deux matrices sont égales si elles ont :
- le même nombre de lignes
- le même nombre de colonnes
- tous les coefficients pris deux à deux (sur la même ligne et la même colonne) sont égaux

Exemples :

E 1 – Une matrice carrée est dite **diagonale** si elle est carrée et si tous les termes qui ne sont pas situés sur la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$$

autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si $\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0$.

E 2 – Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si tous les coefficients "en dessous" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i > j, a_{i,j} = 0$.

E 3 – Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous les coefficients "au-dessus" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i < j, a_{i,j} = 0$.

E 4 – CAS PARTICULIER : **Matrice nulle**.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

E 5 – CAS PARTICULIER : **matrice identité** (ou **matrice unité**) **d'ordre** n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle ne contient que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

10.1.2 Somme de matrices, Multiplication par un scalaire

Définition 3

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit alors la matrice somme $A + B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où on additionne deux à deux les termes correspondants aux mêmes lignes et colonnes.

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3+\sqrt{2} \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarques :

R 1 – On ne peut pas calculer la somme de deux matrices n'ayant pas le même nombre de lignes ou le même nombre de colonnes

R 2 – L'addition de matrices possède les propriétés suivantes :
- elle est **commutative** : $A + B = B + A$
- elle est **associative** : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- elle possède un **élément neutre** : la matrice nulle. $A + 0 = 0 + A = A$
- chaque matrice possède un **opposé** qui est $-A = \Big(- a_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Définition 4

Soit $A = \Big(a_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

On définit alors la matrice λA comme une matrice de même taille que A où on multiplie tous les coefficients de la matrice A par le scalaire λ :

$$\lambda A = \Big(\lambda a_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Remarques :

R 1 – On écrit λA mais on n'écrit pas $A\lambda$: le coefficient toujours devant.

R 2 – Pour toute matrice A, on a $0A = 0$

R 3 – Pour toute matrice A, on a $1A = A$

R 4 – L'addition et la multiplication par un scalaire sont distributifs l'un sur l'autre :

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \qquad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Définition 5

Soient $A = \Big(a_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = \Big(b_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soient λ et μ deux scalaires. Alors

$$\lambda A + \mu B = \Big(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

est appelé une **combinaison linéaire de A et B**.

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_k$ sont k matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k$ est une **combinaison linéaire** de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, i.e. une matrice obtenue par des sommes ou des multiplications par des scalaires.

10.1.3 Produit matriciel

Définition 6

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, i.e. le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

On peut alors définit une matrice produit $C = AB = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!],\ \boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}}$$

Exemples :

E 1 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

E 2 – $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad \text{IMPOSSIBLE}$

E 3 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

E 4 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

E 5 – $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax+by)$

E 6 – $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix}$

Remarques :

R 1 – Si le produit AB existe, le produit BA peut ne pas exister.

R 2 – Le produit matriciel **n'est pas commutatif.** Autrement dit, même si AB et BA existent, on n'a pas forcément $AB = BA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc de manière général $\boxed{AB \neq BA}$.

R 3 – Le produit matriciel est **associatif**. Si les produits ont bien un sens, on a :

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$$

R 4 – Le produit matriciel est distributatif à droite et à gauche par rapport à l'addition :

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \qquad (B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$$

R 5 – Le produit matriciel possède des éléments neutres qui sont les matrices identités :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad I_nA = AI_pA$$

R 6 – On a pour toutes matrices A et B telles que AB existe, et pour tout scalaire λ

$$A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda\,(A \times B)$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
On peut donc avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et avoir $AB = 0$ où 0 désigne la matrice nulle. On dit que **le produit matriciel n'est pas intègre**.
Par conséquent, il faudra faire attention : $AB = AC \quad \not\Longrightarrow B = C$

10.1.4 Produits de matrices carrées

Exemples :

E 1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors
$$A0_n = 0_nA = 0_n \qquad \text{et} \qquad AI_n = I_nA = A$$

E 2 – Un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Plus précisément, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors $DD' = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n) = D'D$.

E 3 – Un produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure.

E 4 – Un produit de matrices triangulaires inférieure reste une matrice triangulaire inférieure.

Définition 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
Alors on définit les puissances de la matrice A par :
$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1,\ A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ fois}} = A^{k-1}A = AA^{k-1}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
On en déduit que $\forall k \geqslant 3,\ A^k = 0$. On dit que la matrice A est **nilpotente d'ordre 3.**

Remarque :

ATTENTION. En général $\boxed{(AB)^k \neq A^kB^k}$. On a $(AB)^k = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{k \text{ fois}}$

Définition 8
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que **les matrices A et B commmutent** si
$$AB = BA$$

Remarques :

R 1 – Si $AB = BA$, alors on a bien dans ce cas, $(AB)^k = A^kB^k$.

R 2 – La matrice identité d'ordre n, I_n commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n.

R 3 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 9 ***Formule du binôme de Newton***

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent (i.e. $AB = BA$). Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

10.1.5 Transposée d'une matrice

Définition 10

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la **matrice transposée de A**, notée ${}^tA$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où on transpose les lignes en colonnes de A et vice-versa : ${}^tA = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$.

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : ${}^t({}^tA) = A, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$, $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}$

10.1.6 Matrices et systèmes linéaires

Définition 11

Soit un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

On peut **représenter ce système matriciellement** par une équation du type

$$AX = B$$

avec les notations suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

10.2 Matrices carrées inversibles

10.2.1 Définition

Définition 12

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors notée A^{-1} et s'appelle **l'inverse de A**.
L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{K})$ appelé le **groupe linéaire des matrices inversibles**.

Remarques :

R 1 – Si une matrice A est inversible, son inverse est unique.

R 2 – Si une matrice A est inversible à droite (il existe B_1 telle que $AB_1 = I_n$), alors elle est inversible à gauche (il existe C_1 telle que $C_1A = I_n$).
De même, si une matrice est inversible à gauche, elle est inversible à droite également.

Exemples :

E 1 – Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.

E 2 – La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

E 3 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A - I_n = 0$. Alors, on a

$$A^2 - 3A - I_n = 0 \Longleftrightarrow A^2 - 3A = I_n \Longleftrightarrow A(A - 3I_n) = I_n$$

La matrice A est donc inversible à droite, donc inversible, et son inverse est

$$A^{-1} = A - 3I_n$$

Proposition 13

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ (i.e. inversibles).

1. *Si A est inversible, alors pour toutes matrices M, N de même taille : $AM = AN \Longrightarrow M = N$.*
2. *A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *Le produit AB est aussi inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et :

$$(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p = A^{-p}$$

4. *Pour $\lambda \neq 0$, λA est inversible et on a : $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$*
5. *A est inversible si et seulement ${}^tA$ est inversible, et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

10.2.2 Matrice inversible et système linéaire

Théorème 14

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système

$$AX = Y$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de Cramer :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = Y$$

Dans ce cas, on a

$$\boxed{AX = Y \iff X = A^{-1}Y}$$

La résolution du système $AX = Y$ permet de déterminer A^{-1}.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Prenons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= y_3 \end{cases} \\
&\iff \quad \vdots \\
&\iff \begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_3 &= -2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 15

1. *Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*
2. *Une matrice diagonale D est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*
   Dans ce cas, si $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Remarque :

Une matrice contenant une ligne nulle ou une colonne nulle ne sera pas inversible.

10.2.3 Méthode du Pivot de Gauss

Définition 16

Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

- on peut échanger des lignes i et j :
$$L_i \longleftrightarrow L_j$$
- on peut multiplier une ligne par un réel non nul :
$$L_i \longleftarrow aL_i, \qquad (a \neq 0)$$
- on peut rajouter à une ligne autant de fois qu'on veut une autre ligne :
$$L_i \longleftarrow L_i + bL_j, \qquad (b \in \mathbb{R})$$

De même pour les colonnes :

- on peut échanger des colonnes i et j :
$$C_i \longleftrightarrow C_j$$
- on peut multiplier une colonne par un réel non nul :
$$C_i \longleftarrow aC_i, \qquad (a \neq 0)$$
- on peut rajouter à une colonne autant de fois qu'on veut une autre ligne :
$$C_i \longleftarrow C_i + bC_j, \qquad (b \in \mathbb{R})$$

Définition 17

Lorsqu'on obtient une matrice B à partir d'une matrice A à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires, on dit que **les matrices A et B sont équivalentes** et on note
$$A \sim B$$

Proposition 18

Si A et B sont deux matrices équivalentes, alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Remarque :

Pour savoir si une matrice est inversible, on peut donc essayer de la changer à l'aide d'opérations élémentaires en une matrice plus simple pour vérifier l'inversibilité : les matrices triangulaires sont l'exemple le plus simple. On applique donc la méthode du Pivot de Gauss, non plus sur le système, mais sur la matrice elle-même et on regarde si la matrice triangularisée obtenue possède une ligne/colonne nulle

Remarque :

METHODE DE GAUSS-JORDAN.
Pour calculer explicitement l'inverse d'une matice inversible $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il suffit de la transformer en la matrice identité I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement ou **sur les colonnes uniquement**.
Si on répète exactement les mêmes opérations dans le même ordre en partant initialement de la matrice I_n, on obtiendra à la fin la matrice inverse A^{-1}.

ATTENTION : la méthode ne marche que si on ne mélange pas les opérations lignes/colonnes.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Puisqu'on fait les mêmes opérations sur les matrices A et I, on les écrit côte à côte et on applique les opérations élémentaires simultanément pour déterminer A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut conclure ici que la matrice A est inversible, puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.