
Ensembles et dénombrement

2.1 Théorie des ensembles

2.1.1 Définitions

Définition 1

Soient u_1, u_2, \dots, u_p des objets mathématiques. On forme alors l'**ensemble**

$$E = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$$

On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est **un élément** de l'ensemble E , ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit

$$u_i \in E$$

Exemples :

E1 – $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

E2 – \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1, 2\}, \quad \{2, 1\}, \quad \{1, 1, 2, 2, 2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition 2

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E , on le note

$$\text{Card}(E)$$

Un ensemble est **fini** si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **infini**.

Exemples :

E1 – L'ensemble vide, noté \emptyset , est un ensemble de cardinal 0.

E2 – L'ensemble $\{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ est de cardinal 4.

E3 – Pour tous entiers naturels m et n , on note si $m \leq n$:

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, m+2, \dots, n-1, n\}$$

et si $m > n$: $\llbracket m, n \rrbracket = \emptyset$.

E4 – Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini et est de cardinal n .

E5 – Si $m \leq n$, alors l'ensemble $\llbracket m, n \rrbracket$ est un ensemble fini de cardinal $n - m + 1$.

2.1.2 Parties d'un ensemble**Définition 3**

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E et on écrit

$$F \subset E$$

si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E , i.e.

$$F \subset E \iff \forall x \in F, x \in E$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E .

Exemples :

E1 – On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

E2 – Lorsqu'on a un ensemble E , il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de E vérifiant une certaine propriété :

$$E = \mathbb{R}, \quad F = \{x \in E / x^2 - 5x + 4 < 0\}$$

Par exemple, on note

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}, \quad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

Proposition 4

Soient E, F et G trois ensembles. Alors

1. $\emptyset \subset E$
2. $E \subset E$.
3. **Transitivité** : si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.
4. **Double inclusion** :

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Proposition 5

Soit E un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de E .
 Alors A est également un ensemble fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.
 Si de plus, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$, alors nécessairement $A = E$.

Définition 6

Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E .

Remarque :

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chacun des éléments est un ensemble

2.1.3 Intersection et union d'ensembles**Définition 7**

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de E et F** , notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F .
- On appelle **union de E et F** , notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F , i.e. dans au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits disjoints.

Proposition 8

La relation d'intersection est :

- **commutative** : $A \cap B = B \cap A$
- **associative** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- vérifie $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- **commutative** : $A \cup B = B \cup A$
- **associative** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- vérifie $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :

- **la distributivité de \cap sur \cup** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- **la distributivité de \cup sur \cap** : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque :

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on note :

- leur réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I / x \in A_i$.
- leur intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$.

Définition 9

Soit un ensemble E . Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties non vides de E est appelée une **partition de E** si

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- $\forall i, j \in I, i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 10*Formule de Poincaré*

Soient E, F deux ensembles finis. On a :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$$

En particulier, si E et F sont disjoints, on a

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

Démonstration :

Si on ajoute $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$. On doit donc retrancher $\text{Card}(E \cap F)$ pour obtenir le cardinal de $E \cup F$.

Proposition 11*Formule du Crible*

Soient E, F et G trois ensembles finis. Alors

$$\text{Card}(E \cup F \cup G) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) + \text{Card}(G) - \text{Card}(E \cap F) - \text{Card}(F \cap G) - \text{Card}(E \cap G) + \text{Card}(E \cap F \cap G)$$

Démonstration :

Si on ajoute $\text{Card}(E)$, $\text{Card}(F)$ et $\text{Card}(G)$, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$, deux fois ceux de $F \cap G$, deux fois ceux de $E \cap G$ et trois fois ceux de $E \cap F \cap G$. On doit donc retrancher $\text{Card}(E \cap F)$, $\text{Card}(F \cap G)$ et $\text{Card}(E \cap G)$ et on corrige donc le problème, sauf pour les éléments de $E \cap F \cap G$ qui ne sont plus comptés : il faut donc rajouter $\text{Card}(E \cap F \cap G)$.

2.1.4 Complémentaire d'une partie**Définition 12**

Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle **complémentaire de A dans E** , et on note $E \setminus A$, (ou ${}^c A$ ou \bar{A} si aucune confusion n'est possible) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \setminus A = {}^c A = \bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$$

Proposition 13

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

1. ${}^c E = \emptyset$
2. ${}^c \emptyset = E$
3. ${}^c ({}^c A) = A$
4. $({}^c A) \cap A = \emptyset$
5. $({}^c A) \cup A = E$
6. ${}^c (A \cup B) = ({}^c A) \cap ({}^c B)$
7. ${}^c (A \cap B) = ({}^c A) \cup ({}^c B)$

2.1.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 14

On appelle **produit cartésien** de n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n , l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n .

Proposition 15

Si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Démonstration :

On pose $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$. On peut alors représenter tous les éléments du produit cartésien $E \times F$ sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	\dots	(x_1, y_p)
(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	\dots	(x_2, y_p)
\vdots	\vdots	\dots	\vdots
(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	\dots	(x_n, y_p)

ce qui démontre bien que $\text{Card}(E \times F) = n \times p = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Remarque :

De manière plus générale, si E_1, \dots, E_n sont n ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(E_k)$$

En particulier, si E est un ensemble fini, alors

$$\text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$$

2.2 Dénombrement

2.2.1 Dénombrement des p -listes

Définition 16

On appelle p -liste ou p -uplet d'un ensemble E tout élément de E^p , i.e. un élément de la forme

$$(x_1, \dots, x_p), \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in E$$

Théorème 17

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors, le nombre de p -listes d'éléments de E est égal à n^p .

Démonstration :

Cela vient du fait que $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}(E))^p$

Remarque :

On utilise les p -listes en cas de choix successifs de p éléments d'un ensemble, avec éventuelles répétitions

2.2.2 Arrangements et permutations

Définition 18

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p -arrangement de E ou arrangement de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E .

Si E contient n éléments, on note A_n^p le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble à n éléments

Remarque :

Si $p > n$, il ne peut pas y avoir de p -arrangements dans l'ensemble E . On a alors $A_n^p = 0$.

Théorème 19

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Soit $p \leq n$. Alors le nombre de p -arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé **factorielle** n .

Démonstration :

Pour dénombrer les p -uplets (x_1, \dots, x_p) de E^p dont les éléments sont distincts deux à deux, :

- on commence par choisir x_1 parmi les n éléments de E
- puis on choisit x_2 parmi les $n-1$ éléments de E distincts de x_1
- puis on choisit x_2 parmi les $n-2$ éléments de E distincts de x_1 et x_2
- ...
- puis on choisit x_p parmi les $n-p+1$ éléments de E distincts de x_1, x_2, \dots, x_{p-1} .

Il y a donc bien $n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$ p -arrangements de E .

Remarque :

On utilise les arrangements en cas de choix successifs de p éléments pris parmi n , sans répétition

Définition 20

Soit E un ensemble à n éléments. Un n -arrangement de E est appelé une **permutation de E** . Une permutation est donc un n -uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E .

Théorème 21

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E . Autrement dit, il y a $n!$ façons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.

Remarque :

On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition

2.2.3 Combinaisons**Définition 22**

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E qui contient p éléments. On note le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments :

$\binom{n}{p}$, qui se lit " p parmi n ".

Remarques :

R1 – Les éléments d'une combinaison de p éléments sont deux à deux distincts.

R2 – Si $p > n$ ou si $p < 0$ on a $\binom{n}{p} = 0$

R3 – L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

R4 – Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

R5 – On trouve parfois la notation C_n^p pour le coefficient binomial.

Théorème 23

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leq p \leq n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{p(p-1)(p-2) \cdots 1}$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que : $A_n^p = p! \binom{n}{p}$.

Deux p -arrangements d'éléments de $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ont le même support si ils sont formés des mêmes éléments mais pas nécessairement dans le même ordre. On peut alors ranger tous les p -arrangements en catégories en mettant ensemble tous ceux qui ont le même support. On remarque alors que le nombre de catégories est $\binom{n}{p}$ et que chaque catégorie comporte $p!$ arrangements.

Remarque :

On retiendra que l'on utilise les combinaisons dans les problèmes de choix simultanés de p éléments choisis parmi n , sans considération d'ordre et sans répétition.

2.3 Coefficients binomiaux

2.3.1 Formule de symétrie

Théorème 24

Soient n et p deux entiers. Alors :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration :

Démonstration combinatoire :

En effet, chaque combinaison de p éléments de E peut être associée à une et unique partie de $n - p$ éléments de E : son complémentaire. Et réciproquement chaque combinaison de $n - p$ éléments de E est le complémentaire d'exactly une seule combinaison de p éléments.

Les nombres de telles combinaisons sont donc les mêmes : on a bien $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Démonstration calculatoire : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}$.

2.3.2 Formule de récurrence

Théorème 25

Soient n et p deux entiers plus grands que 1. Alors :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration :

Démonstration calculatoire : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

2.3.3 Formule de Pascal

Théorème 26

Soient n et p deux entiers naturels. Alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :

Démonstration calculatoire :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \times \frac{n}{p(n-p)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$$

Démonstration combinatoire :

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n éléments. On sait que $\binom{n}{p}$ désigne l'ensemble des p -combinaisons choisies parmi E .

Partageons toutes ces p -combinaisons en deux parties :

- celles qui contiennent x_n : c'est la partie A
- celles qui ne contiennent pas x_n : c'est la partie B .

Les éléments de la partie A sont des p -combinaisons de E qui contiennent x_n . Il y en a autant que de manières de choisir les $p - 1$ éléments qui accompagnent x_n dans la p -combinaison : autrement dit, on doit choisir $p - 1$ éléments parmi les $n - 1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi $\text{Card}(A) = \binom{n-1}{p-1}$.

Les éléments de la partie B sont des p -combinaisons de E qui ne contiennent pas x_n . Il y en a autant que de manières de choisir les p éléments dans la p -combinaison : autrement dit, on doit choisir p éléments parmi les $n - 1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi $\text{Card}(B) = \binom{n-1}{p}$.

Comme (A, B) forme une partition de l'ensemble des p -combinaisons de E , on a $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, d'où le résultat.

2.3.4 Formule de Vandermonde**Théorème 27**

Soient n, m et p trois entiers naturels. Alors
$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

Démonstration :**Démonstration combinatoire :**

Considérons un ensemble comportant $n+m$ éléments, disons n éléments x_1, x_2, \dots, x_n qui forment un ensemble A et m éléments y_1, y_2, \dots, y_m qui forment un ensemble B .

$\binom{n+m}{p}$ représente le nombre de p -combinaisons choisies parmi l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Partageons ces p -combinaisons en plusieurs groupes :

- Celles qui possèdent 0 élément de A et p éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{0} \binom{m}{p}$
- Celles qui possèdent 1 élément de A et $p - 1$ éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{1} \binom{m}{p-1}$
- ...
- Celles qui possèdent p éléments de A et 0 élément de B : il y en a exactement $\binom{n}{p} \binom{m}{0}$.

Au final, on a donc bien

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}$$

2.3.5 Formule du binôme de Newton**Théorème 28**

Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration :**Démonstration combinatoire :**

On sait que

$$(a + b)^n = (a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)$$

où le facteur $(a + b)$ apparaît exactement n fois.

En développant ce produit, on va obtenir une somme de produits de n facteurs, chacun étant choisi dans un des facteurs $(a + b)$. Chaque terme de la somme va donc être de la forme

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_k \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n-k} = a^k b^{n-k}$$

où k est un entier compris entre 0 et n .

Chaque terme $a^k b^{n-k}$ va apparaître plusieurs fois dans la somme. Combien exactement ? Autant de fois qu'on pourra choisir k fois le terme a sur les n , autrement dit $\binom{n}{k}$ fois. On a donc $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration calculatoire :

Procédons par récurrence sur n .

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- $n = 0$. Alors $(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également, autrement dit que $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \times (a + b)^n \stackrel{\text{HR}}{=} (a + b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell=k+1}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right) a^\ell b^{n+1-\ell} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Théorème 29

Si E est un ensemble à n éléments, alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration :

Notons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, E_k l'ensemble des parties de E à k éléments. Alors, la famille (E_0, E_1, \dots, E_n) est une partition de $\mathcal{P}(E)$. De plus, on sait que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$.

$$\text{Ainsi } \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$