1

Soient A, B et C trois événements d'une tribu $\mathcal{A}$. Exprimer les événements suivants en fonction de A, B et C et des opérations possibles dans $\mathcal{A}$, et décrire leur événement contraire.

1. E_1 : A seul se réalise
2. E_2 : A et C se réalisent, mais non B.
3. E_3 : Les trois événements se réalisent.
4. E_4 : L'un au moins des événements se réalise.
5. E_5 : Deux événements au moins se produisent.
6. E_6 : Un événement au plus se réalise.
7. E_7 : Aucun des trois événements ne se produit.
8. E_8 : Exactement deux événements se produisent.
9. E_9 : Au plus deux événements se produisent.

1. $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Le contraire de E_1 est $\overline{E_1} = \overline{A} \cup B \cup C$: "A ne se réalise pas".
2. $E_2 = A \cap C \cap \overline{B} = (A \cap C) \setminus B$. Le contraire de E_2 est $\overline{E_2} = \overline{A} \cup \overline{C} \cup B$.
3. $E_3 = A \cap B \cap C$. Le contraire de E_3 est $\overline{E_3} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$: "au moins un événement ne se réalise pas".
4. $E_4 = A \cup B \cup C$. Le contraire de E_4 est $\overline{E_4} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$: "aucun événement ne se réalise".
5. $E_5 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Le contraire de E_5 est $\overline{E_5}$: "zéro ou un événement se réalise".
6. $E_6 = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$.
   Remarquons qu'on a aussi $E_6 = \overline{E_5} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.
7. $E_7 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, ce qui revient à $E_7 = \overline{A \cup B \cup C}$. Remarquons qu'on a ainsi $\overline{E_7} = E_4$.
8. $E_8 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$.
9. $E_9 = \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$. Remarquons qu'on a ainsi $\overline{E_9} = E_3$.

2

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soient A, B, C trois événements de $\mathcal{A}$. Parmi les phrases suivantes, lesquelles ont un sens ?

1. $\mathbb{P}(A) = 0$
2. $A \leqslant 1/2$
3. $\mathbb{P}(A) = -0.2$
4. $\mathbb{P}(B) = e/2$.
5. $\mathbb{P}(A) \subset \mathbb{P}(B)$
6. $\mathbb{P}(A) = \emptyset$
7. $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}(C)$
8. $B = \Omega$
9. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.
10. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cup \mathbb{P}(C)$
11. $\mathbb{P}(\mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A)$
12. $\mathbb{P}(C) \geqslant \mathbb{P}(B)$.

1. ok
2. pas de sens
3. pas de sens (une probabilité n'est jamais négative)
4. pas de sens (une probabilité ne peut pas être supérieure strictement à 1)
5. pas de sens (le signe $\subset$ ne va qu'entre deux ensembles/événements).
6. pas de sens ($\mathbb{P}(A)$ est un nombre, $\emptyset$ est un ensemble)
7. pas de sens (on ne multiplie pas deux événements)
8. ok
9. ok
10. pas de sens (le signe $\cup$ ne va qu'entre deux ensembles/événements).
11. pas de sens (on ne calcule la probabilité que d'un événement)
12. ok

3

On lance 5 fois de suite un même dé équilibré à 6 faces.

1. Proposer un univers Ω modélisant cette expérience, et préciser $Card(\Omega)$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 numéros distincts ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

1. Ici, un résultat de l'expérience est noté par une liste de 5 nombres, chacun entre 1 et 6.
$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_i \in [\![1, 6]\!]\} = [\![1, 6]\!]^5$$
et on a $Card(\Omega) = 6^5$.
2. On est en situation d'équiprobabilité sur Ω.
Notons A l'événement « obtenir 5 numéros distincts ».
On a $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6!$ issues qui réalisent l'événement A (en choisissant successivement le premier résultat, puis le second, . . . , puis le cinquième). Donc :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{6!}{6^5}$$
3. Notons B l'événement « obtenir toujours le même numéro ».
On a 6 issues qui réalisent l'événement B (une par numéro possible), donc :
$$\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4}$$

4

On joue à Pile ou Face 4 fois de suite avec une pièce équilibrée. On note A « on obtient deux fois Pile et deux fois Face », et B « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

1. Décrire l'univers Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$. Que vaut $Card(\mathcal{P}(\Omega))$?
2. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

1. $\Omega = \{P, F\}^4$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne toutes les parties de Ω. Comme $Card(\Omega) = 2^4 = 16$, on a $Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{16} = 65536$
2. On est en situation d'équiprobabilité sur Ω. Chaque liste possible apparaît avec probabilité $\dfrac{1}{16}$.
   - $A = \{(P,P,F,F), (P,F,P,F), (P,F,F,P), (F,P,P,F), (F,P,F,P), (F,F,P,P)\}$, donc $Card(A) = 6$:
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$$
   - En notant P_k : « la pièce donne Pile au k-ième lancer »et F_k : « la pièce donne Face au k-ième lancer », on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\Big((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)\Big) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$
   - $A \cap B = \{(P,F,P,F), (P,F,F,P), (F,P,P,F), (F,P,F,P)\}$, donc $Card(A \cap B) = 4$. Ainsi :
   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$
   - $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

5

Une urne contient cinq boules vertes, six boules bleues et sept boules jaunes, toutes différentes (numérotées) mais indistinguables au toucher. On prélève trois boules au hasard successivement et sans remise.

1. Calculer la probabilité pour que les trois boules soient de la même couleur.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une boule verte.
3. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une boule de chaque couleur.
4. Recommencer les questions précédentes si on fait des tirages avec remise.

1. On est en situation d'équiprobabilité à chaque tirage successif dans l'urne. Notons pour tout k :
   - ⋆ V_k : « la k-ième boule tirée est verte ».
   - ⋆ B_k : « la k-ième boule tirée est bleue ».
   - ⋆ J_k : « la k-ième boule tirée est jaune ».

   Si M désigne l'événement « les trois boules sont de la même couleur », on a :
$$M = (V_1 \cap V_2 \cap V_3) \ \cup \ (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \ \cup \ (J_1 \cap J_2 \cap J_3)$$
   donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3) \quad \text{(événements disjoints)}\\ &= \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2)\mathbb{P}_{V_1 \cap V_2}(V_3) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)\\ &= \frac{5}{18} \times \frac{4}{17} \times \frac{3}{16} + \frac{6}{18} \times \frac{5}{17} \times \frac{4}{16} + \frac{7}{18} \times \frac{6}{17} \times \frac{5}{16}\\ &= \frac{60+120+210}{18 \times 17 \times 16} = \frac{390}{4896} = \frac{65}{816}\end{aligned}$$

2. Notons V l'événement « on obtient au moins une boule verte », alors $\overline{V}$ est « on obtient aucune boule verte ». Donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{V})\\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3})\\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(\overline{V_2})\mathbb{P}_{\overline{V_1} \cap \overline{V_2}}(\overline{V_3})\\ &= 1 - \frac{13}{18} \times \frac{12}{17} \times \frac{11}{16} = 1 - \frac{1716}{4896} = \frac{265}{408}\end{aligned}$$

3. Notons T « on obtient un résultat tricolore ». Alors :
$$T = (V_1 \cap B_2 \cap J_3) \ \cup \ (V_1 \cap B_2 \cap J_3) \ \cup \ (B_1 \cap V_2 \cap J_3) \cap (B_1 \cap J_2 \cap V_3) \cup (J_1 \cap V_2 \cap B_3) \cup (J_1 \cap B_2 \cap V_3)$$
   En faisant comme pour les questions précédentes (incompatibilité, puis probas composées), on obtient :
$$\mathbb{P}(T) = 6 \times \frac{5 \times 6 \times 7}{18 \times 17 \times 16} = \frac{35}{136}$$

4. Si on procède avec remise, alors les tirages sont indépendants les uns les autres. Les probabilités précédentes deviennent :
$$\mathbb{P}(M) = \left(\frac{5}{18}\right)^3 + \left(\frac{6}{18}\right)^3 + \left(\frac{7}{18}\right)^3 = \frac{19}{36}$$
$$\mathbb{P}(V) = 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^3 = \frac{3635}{5832}$$
$$\mathbb{P}(T) = 6 \times \left(\frac{5}{18}\right)\left(\frac{6}{18}\right)\left(\frac{7}{18}\right) = \frac{35}{162}$$

6

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

1. $\Omega = [\![1,8]\!]^3$, donc $Card(\Omega) = 8^3 = 512$ et on est en situation d'équiprobabilité sur Ω.
   Soit A l'événement « les trois boules apparaissent dans un ordre strictement croissant ».
   $$A = \{(i,j,k), \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant 8\}$$
   On doit donc à présent déterminer $Card(A)$. Il faut donc déterminer toutes les listes strictement croissantes de 3 nombres de $[\![1,8]\!]$: $(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),\ldots,(6,7,8)$.
   Il suffit de choisir trois nombres distincts successivement, il y a $8\times7\times6$ possibilités, puis de diviser le résultat par $3! = 6$ (car si on choisit trois nombres distincts, il y a $3\times2\times1$ listes possibles ordonnées avec ces trois nombres, mais une seule ne fournit une liste croissante). On a donc :
   $$Card(A) = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$
   On a donc :
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{56}{512} = \frac{18}{256} = \frac{9}{128}$$
2. Soit B l'événement « les trois boules apparaissent dans un ordre croissant ».

   Notons B_1 « on obtient deux numéros identiques, puis un strictement plus grand ».
   Notons B_2 « on obtient un numéro, puis deux identiques strictement plus grands ».
   Notons B_3 « on obtient trois fois le même numéro ».
   Alors :
   $$B = A \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$$
   et l'union est incompatible, les événements sont tous disjoints 2 à 2.
   $$B_1 = \{(i,i,j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant 8\}$$
   Ainsi, $Card(B_1) = 28$ (autant de choix que de couples (i,j) tels que $i < j$).
   $$B_2 = \{(i,j,j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant 8\}$$
   Ainsi, $Card(B_2) = 28$ également.
   $$B_3 = \{(j,j,j),\ 1 \leqslant j \leqslant 8\}$$
   Ainsi, $Card(B_3) = 8$.
   Finalement :
   $$\mathbb{P}(B) = \frac{56+28+28+8}{512} = \frac{120}{512} = \frac{30}{128}$$

7

Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1. Les numéros de 1 à 5 ont cependant la même probabilité de sortie.

1. Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro impair.

1. Notons A_k l'événement « le dé donne k », et notons $x = \mathbb{P}(A_1)$.
   D'après l'énoncé, on a $\forall k \in [\![1, 5]\!], \mathbb{P}(A_k) = x$, et $\mathbb{P}(A_6) = 3x$.
   Or, $(A_1, \ldots, A_6)$ forme un système complet d'événements. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(A_k) = 1 \Longrightarrow x + x + x + x + x + 3x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{8}$$

   La probabilité de sortie pour chaque numéro est donc de $1/8$, sauf pour le nombre 6 pour lequel la probabilité de sortie est de $3/8$.

2. Soit B l'événement « le numéro est impair ». Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_5) = 3 \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

8

Soit $p \in]0,1[$. On considère $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(\{k\}) = p(1-p)^k$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Que vaut la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Notons $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = p(1-p)^k$.

- Pour tout $k \geqslant 0$, on a $u_k \geqslant 0$
- Puisque $p \in]0,1[$, on a $0 < 1-p < 1$, donc la série de terme général $(1-p)^k$ converge (série géométrique), et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Ainsi, $\mathbb{P}$ fournit bien une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

De plus, en notant A l'événement « on obtient un nombre pair », on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2j\}) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{2j} \\
&= p \sum_{j=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^j \\
&= p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)} = \boxed{\frac{1}{2-p}}
\end{aligned}$$

9

Soit $\lambda > 0$. On considère $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Notons $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

- Pour tout $k \geqslant 0$, on a $u_k \geqslant 0$
- La série de terme général $\dfrac{\lambda^k}{k!}$ converge (série exponentielle), et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1$$

Ainsi, $\mathbb{P}$ fournit bien une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

10

Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.
Quelle est la probabilité de victoire de chacune des cinq personnes ?

Pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, notons A_k : « la k-ième personne qui tire gagne », et B_k : « la k-ième boule tirée est blanche ».

- Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
- $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(B_3) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$.
- $\mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(B_4) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$.
- Pour terminer :

$$\mathbb{P}(A_5) = 1 - \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(A_k) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{15-5-4-3-2}{15} = \frac{1}{15}$$

11

Une galette des rois est découpée en 12 parts égales. Elle ne contient qu'une seule fève. On a 12 convives qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux pour avoir le maximum de chances d'avoir la fève ?

Notons pour tout $k \in [\![1, 12]\!]$, A_k : « le k-ième convive obtient la fève ».

- Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{12}$.
- $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{11}{12} \times \dfrac{1}{11} = \dfrac{1}{12}$.
- $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3) = \dfrac{11}{12} \times \dfrac{10}{11} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{12}$.
- Pour tout $k \in [\![3, 12]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \cdots \times \frac{13-k}{14-k} \times \frac{1}{13-k} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Finalement, tous les convives (du plus jeune au plus vieux) ont la même probabilité d'obtenir la fève.

12

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement et infiniment des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur. On note B_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche ».

1. Déterminer la probabilité qu'on ne tire que des boules blanches.
2. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée presque-sûrement.

1. Notons B l'événement « on ne tire que des boules blanches ». Alors :

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$$

et

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\right)$$

Or, pour $N \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\right) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{N-1}}(B_N)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{N}{N+1}\\ &= \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} = 0$$

L'événement B est négligeable.

2. Si A désigne l'événement « on tire au moins une fois la boule rouge initiale ». Alors $A = \overline{B}$, donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1$$

Donc A est presque-sûr.

13

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement avec remise des boules dans cette urne. Si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule blanche supplémentaire. Si on tire une boule rouge, le jeu s'arrête. On note R_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est rouge ».

1. Déterminer la probabilité de R_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

1. Déjà, on a $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{1}{2}$ par équiprobabilité.

   Notons pour tout $k \geqslant 1$, B_k l'événement « la boule tirée au k-ième tirage est blanche ». Alors pour tout $n \geqslant 1$,

   $$R_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap R_n$$

   Donc par la formule des probabilités composées :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R_n\right) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-1}}(R_n)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

   On a donc :

   $$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

2. Notons A l'événement « le jeu s'arrête », et J l'événement « le jeu ne s'arrête jamais ».

   On a : $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n$, et remarquons que les R_k sont deux à deux incompatibles. On a donc :

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(R_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$$

   et finalement :

   $$\mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0$$

   Ainsi, le jeu s'arrête presque-sûrement.

14

Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule rouge ; le jeu s'arrête alors. On note pour $n \geqslant 1$, B_n : « on tire une boule blanche au n-ième tirage », et F_n : « le jeu s'arrête à l'issue du n-ième tirage ».

1. Exprimer F_n en fonction des B_i.
2. Soit A : « le jeu s'arrête ». Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

1. Pour $n \geqslant 1$, on a $F_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$ (avec $F_1 = \overline{B_1}$)
2. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$

   De plus, les tirages étant indépendants (on procède avec remise), on a :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\cdots\mathbb{P}(B_{n-1})\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$$

   Ainsi par incompatibilité des F_k :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

   Le jeu s'arrête donc presque-sûrement.

15

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (avec équiprobabilité) une urne, puis on tire successivement et avec remise deux boules dans cette urne.

1. On note A_j l'événement « la boule numéro j est blanche ». Calculer la probabilité de A_1 et de A_2.
2. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

1. Notons, pour $k \in [\![1, n]\!]$, B_k l'événement « on choisit l'urne numéro k ».
La famille $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ formant un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \cap A_1)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_1)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\mathbb{P}(A_2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \cap (A_1 \cap A_2)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_1 \cap A_2)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \frac{(n+1)^2}{(2n)^2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

donc A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

16

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer infiniment un dé équilibré à 6 faces. On note A_n : « on n'a pas obtenu de 6 lors des n premiers lancers ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement « on n'obtient jamais de 6 ».
2. Montrer que presque-sûrement on obtient au moins une fois un numéro pair.

1. Notons A l'événement « on n'obtient jamais de 6 ». Alors :

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

et remarquons que la suite (A_n) est décroissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

(en effet, les lancers étant indépendants, A_n se réalise si à chaque numéro on a un numéro différent de 6, donc $\mathbb{P}(A_n) = (\frac{5}{6})^n$).
L'événement « on obtient au moins un 6 »est donc presque-sûr.

2. Notons B l'événement « on obtient au moins une fois un numéro pair »et notons, pour tout $n \geqslant 1$, B_n l'événement « sur les n premiers lancers, on obtient au moins une fois un numéro pair ». Alors :

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

et remarquons que la suite (B_n) est croissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

Or, $\overline{B_n}$ signifie « sur les n premiers lancers, on a eu que des numéros impairs », donc : $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = (\frac{3}{6})^n = 1/2^n$, ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Presque-sûrement, on obtient au moins une fois un numéro pair.

17

Alain et Bruno lancent le même dé à tour de rôle et Alain commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obtenir un « 6 ». Quand Alain ou Bruno gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants : $A =$ « victoire d'Alain », $B =$ « victoire de Bruno » et $D =$ « pas de vainqueur ».
On note F_n : « fin de la partie au n-ième lancer » et S_j : « le j-ième lancer donne un 6 ».

1. En exprimant l'événement D à l'aide des événements S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aide d'événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

1. $D = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \overline{S_j}$. On a donc :
$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} \overline{S_j}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{N} \overline{S_j}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2})\cdots\mathbb{P}(\overline{S_N})\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0$$
Ainsi, l'événement D est négligeable.
2. $F_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$ donc :
$$\mathbb{P}\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n\right) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2})\cdots\mathbb{P}(\overline{S_{n-1}})\mathbb{P}(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$$
3. Alain gagne si la partie s'arrête lors d'un lancer de numéro impair, Bruno gagne si la partie s'arrête lors d'un lancer de numéro pair. Ainsi :
$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_{2k+1} \qquad \text{et} \qquad B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k}$$
4. Par incompatibilité :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{(2k+1)-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$
Enfin, puisque (A, B, D) forme un système complet d'événements, on a :
$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{6}{11} - 0 = \frac{5}{11}$$

18

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

1. Une pièce testée soit refusée et bonne.
2. Une pièce testée soit acceptée.
3. Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

L'expérience aléatoire consiste ici à choisir une pièce au hasard. Notons :
- D :« la pièce est défectueuse », alors $\overline{D}$: « la pièce est correcte ».
- A: « la pièce est acceptée », alors $\overline{A}$: « la pièce est refusée ».

D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(D) = 0.03, \qquad \mathbb{P}_{\overline{D}}(A) = 0.99, \qquad \mathbb{P}_D(\overline{A}) = 0.98$$

Remarquons qu'on en déduit, en passant aux complémentaires, que :

$$\mathbb{P}(\overline{D}) = 0.97, \qquad \mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{A}) = 0.01, \qquad \mathbb{P}_D(A) = 0.02$$

1. On cherche $\mathbb{P}(\overline{D} \cap \overline{A})$. D'après les conditions de l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{D} \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{A}) = 0.97 \times 0.01 = 0,0097$$

2. On cherche $P(A)$. Comme $(D, \overline{D})$ forme un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\overline{D} \cap A) + \mathbb{P}(D \cap A)\\ &= \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(A) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(A)\\ &= 0.97 \times 0.99 + 0.03 \times 0.02 = 0.9603 + 0.0006 = 0.9609\end{aligned}$$

3. On cherche $P_A(D)$. On a :

$$\mathbb{P}_A(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.0006}{0.9609} = \frac{6}{9609} = \frac{3}{3203}$$

19

Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

— A : « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »
— B : « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »
— C : « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »
— D : « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

Parmi ces événements, lesquels sont indépendants ? Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

Ici, on se place en situation d'équiprobabilité, les tirages se faisant avec remise, leurs résultats sont indépendants les uns les autres. Remarquons que :

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(C) = \left(\frac{3}{5}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(D) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{2^4+3^4}{5^4}$$

— A et B sont $\boxed{\text{indépendants}}$ « physiquement »(puisque ne dépendent pas des résultats des même tirages).
— A et C ne sont pas indépendants, puisque $A \cap C = \emptyset$. (on a donc $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$ mais $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \neq 0$).
— $A \cap D$ signifie « on a eu 4 boules vertes », donc $\mathbb{P}(A \cap D) = \left(\frac{2}{5}\right)^4$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(A \cap D)$$

donc A et D ne sont pas indépendants.
— B et C ne sont pas indépendants, puisque $B \cap C = \emptyset$. (on a donc $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$ mais $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \neq 0$).
— $B \cap D$ signifie « on a eu 4 boules vertes », donc $\mathbb{P}(B \cap D) = \left(\frac{2}{5}\right)^4$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(B \cap D)$$

donc B et D ne sont pas indépendants.
— $C \cap D$ signifie « on a eu 4 boules jaunes », donc $\mathbb{P}(C \cap D) = \left(\frac{3}{5}\right)^4$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D) \neq \mathbb{P}(C \cap D)$$

donc C et D ne sont pas indépendants.
— Enfin, puisqu'ils ne sont même pas indépendants 2 à 2, les quatre événements ne peuvent pas être mutuellement indépendants.

20

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces. On note A : « le premier chiffre est pair », B : « le second chiffre est impair », C : « la somme des chiffres est paire ».
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

— Par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De plus, sur les deux lancers, on a $6 \times 6 = 36$ résultats équiprobables. La somme des chiffres est paire si et seulement si on a eu deux résultats pairs ou deux résultats impairs, donc :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

— $A \cap C$ signifie « on a eu deux résultats pairs », donc :

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

donc A et C sont indépendants.

— $B \cap C$ signifie « on a eu deux résultats impairs », donc :

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

donc B et C sont indépendants.

— $A \cap B$ signifie « on a un résultat pair, puis un résultat impair », donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

donc A et B sont indépendants.

— $A \cap B \cap C = \emptyset$, mais $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \neq 0$, donc A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

21

On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée . Pour $n \geqslant 2$, on note A_n : « au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
2. Est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

1. En notant P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient Pile (resp. Face) au lancer k », on peut écrire que :

$$\begin{aligned} A_n = &(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ &\cup (P_1) \cap (F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ &\cup (P_1 \cap P_2) \cap (F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ &\cup \vdots \\ &\cup (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \\ &\cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_{n-1} \cap P_n) \end{aligned}$$

   En effet, pour que Face ne soit jamais suivi de Pile, on doit avoir nécessairement des (éventuels) Piles avant des (éventuels) Faces.
   Si la pièce est équilibrée, il y a 2^n issues possibles à la suite de n lancers, et ici on a dénombré $n+1$ issues favorables à A_n. Donc par équiprobabilité.
$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{n+1}{2^n}$$

2. Notons A l'événement « Face n'est jamais suivi de Pile ». On a $A = \displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$. Et la suite (A_n) est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, on a donc :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2^N} = 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$
   Ainsi, presque-sûrement, on obtiendra au moins une fois le motif « Face puis Pile ».

22

On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est $p \in]0,1[$, avec $p \neq 1/2$. Pour $n \geqslant 2$, on note A_n : « au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$
2. Est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

1. En notant P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient Pile (resp. Face) au lancer k », on peut écrire que :

$$\begin{aligned} A_n = & (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ & \cup (P_1) \cap (F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ & \cup (P_1 \cap P_2) \cap (F_3 \cap \cdots \cap F_n) \\ & \cup \vdots \\ & \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \\ & \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_{n-1} \cap P_n) \end{aligned}$$

En effet, pour que Face ne soit jamais suivi de Pile, on doit avoir nécessairement des (éventuels) Piles avant des (éventuels) Faces.
Par incompatibilité, puis par indépendance des lancers, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= p^n + (1-p)p^{n-1} + (1-p)^2 p^{n-2} + \cdots + (1-p)^{n-1}p + (1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}(1-p)^k \\ &= p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \\ &= p^n \times \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1-p}{p}} \quad \text{car } \frac{1-p}{p} \neq 1 \text{ (on a } p \neq 1/2) \\ &= \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1} \end{aligned}$$

2. Notons A l'événement « Face n'est jamais suivi de Pile ». On a $A = \displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$. Et la suite (A_n) est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A_N) = \lim_{N \to +\infty} \frac{p^{N+1} - (1-p)^{N+1}}{2p-1} = 0$$

Ainsi, presque-sûrement, on obtiendra au moins une fois le motif « Face puis Pile ».

23

On dispose d'une pièce équilibrée, avec laquelle on fait une succession illimitée de lancers.
On note A_n l'événement : on obtient pour la première fois un Double Pile aux lancers n et $n+1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_3)$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_{n-1}) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(A_{n-2})$. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ (par indépendance des lancers).
   $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \dfrac{1}{8}$ (par indépendance des lancers).
   $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8}$
2. Soit $n \geqslant 3$.
   Remarquons que (P_1, F_1) forme un système complet d'événements (selon le résultat du premier lancer).
   On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(F_1 \cap A_n) + \mathbb{P}(P_1 \cap A_n)\\ &= \mathbb{P}(F_1 \cap A_n) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap A_n)\\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(A_n) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_n)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_{n-2})\end{aligned}$$

   La suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est donc récurrente linéaire double.
   L'équation caractéristique associée est : $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, qui admet pour solutions : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.
   Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$\forall n \geqslant 1, \mathbb{P}(A_n) = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

   Comme $\mathbb{P}(A_1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A_2) = 1/8$, on trouve

$$a = -\frac{\sqrt{5}}{10} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

   Ainsi :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_n) = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n\right)$$

24

Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer. Le joueur B gagne la première partie. La probabilité que A remporte une partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$. On note p_n la probabilité que B remporte la n-ième partie.
À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Notons A_n (resp. B_n) l'événement « le joueur A (resp. B) remporte la n-ième partie.
D'après les hypothèses, on sait que :

$$\mathbb{P}(B_1) = 1$$

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0.6 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 0.5$$

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements (A_n, B_n), on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= (1 - p_n)(1 - 0.6) + p_n 0.5 \\ &= (0.5 - 0.4)p_n + 0.4 \\ &= 0.1 p_n + 0.4 \end{aligned}$$

La suite (p_n) est donc bien arithmético-géométrique, et on a :

$$\boxed{p_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\ p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{2}{5}}$$

L'équation caractéristique associée est $x = \dfrac{1}{10}x + \dfrac{2}{5} \iff \dfrac{9}{10}x = \dfrac{2}{5} \iff x = \dfrac{4}{9}$.

La suite $\left(p_n - \dfrac{4}{9}\right)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. On a finalement :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n - \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{4}{9}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ p_n = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}$$

25

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Si une place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec probabilité $9/10$. Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $4/10$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note R_k l'événement « la place est réservée le jour k » et $r_k = \mathbb{P}(R_k)$ sa probabilité. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $r_{k+1} = \mathbb{P}(R_{k+1})$.
   En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(R_k, \overline{R_k})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{k+1}) &= \mathbb{P}(R_k \cap R_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{R_k} \cap R_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(R_k)\mathbb{P}_{R_k}(R_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{R_k})\mathbb{P}_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) \\
&= r_k \times \frac{9}{10} + (1 - r_k) \times \frac{4}{10} \\
&= \boxed{\frac{1}{2} r_k + \frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

2. La suite (r_k) est donc arithmético-géométrique.
   L'équation caractéristique associée est $x = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5} \iff \frac{1}{2}x = \frac{2}{5} \iff x = \frac{4}{5}$.
   La suite $\left(r_k - \frac{4}{5}\right)$ est donc géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. On a finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ r_k - \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(r_0 - \frac{4}{5}\right)$$

   D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ r_k = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

   On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \frac{4}{5}$.

26

On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire d'une autre manière que le jeu s'arrête presque sûrement.

1. Notons A_n l'événement « Le jeu s'arrête au n-ième lancer ». On cherche donc $\mathbb{P}(A_n)$.
   Notons T_k : « au k-ième lancer, les trois pièces ont donné Pile ». On a alors

   $$A_1 = T_1 \qquad \text{et } \forall n \geqslant 2,\ A_n = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{n-1}} \cap T_n$$

   Les T_i ne sont pas indépendants ici (il y a une condition d'arrêt). Cependant, si le k-ième lancer a lieu, la probabilité d'obtenir trois Pile vaut (par indépendance des trois pièces) $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.
   On a donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{8}$ et pour tout $n \geqslant 2$, on a :

   $$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\overline{T_1})\mathbb{P}_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{n-2}}}(\overline{T_{n-1}})\mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{n-1}}}(T_n) = \boxed{\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{1}{8}}$$

   Soit A l'événement « Le jeu s'arrête ». On a clairement $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, et les A_n étant deux à deux incompatibles, on a :

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{k} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 1$$

   Donc le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Notons B_n l'événement « Au n-ième lancer, le jeu ne s'est pas encore arrêté ». On a alors

   $$B_n = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{n-1}} \cap \overline{T_n}$$

   Toujours avec la formule des probabilités composées (les T_i ne sont pas indépendants a priori) :

   $$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{T_1})\mathbb{P}_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{n-1}}}(\overline{T_n}) = \left(\frac{7}{8}\right)^{n}$$

   La suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, si on suppose que au $n+1$-ième lancer, le jeu ne s'est pas encore arrêté, cela implique nécessairement que au n-ième lancer, le jeu ne s'était pas encore arrêté. Autrement dit $\forall n \geqslant 1,\ B_{n+1} \subset B_n$.

   D'après le théorème de la limite monotone, on sait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$.

   Or, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ correspond à l'événement « Le jeu ne s'arrête pas », autrement dit l'événement $\overline{A}$ (en reprenant les notations de la question 1). On a donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$.
   Ainsi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$, et l'événement A : « le jeu s'arrête » est donc un événement presque sûr.

27

On admet que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Une urne contient une boule noire. Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne et le jeu s'arrête ; sinon il rajoute une boule blanche dans l'urne et recommence.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer la probabilité de A_k : « on obtient pour la première fois un six au k-ième lancer ».
2. Montrer que $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est un système quasi-complet d'événements. En déduire la probabilité que la boule tirée au final soit noire.

1. Notons S_j : « on obtient un six au j-ième lancer de la pièce ». Alors :

$$A_k = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$$

Les S_j (ou $\overline{S_j}$) ne sont pas indépendants ici car il y a une condition d'arrêt du jeu. Mais à chaque lancer du dé, on obtient un six avec probabilité $1/6$.
On a, en appliquant la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-2}}}(\overline{S_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-1}}}(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$

2. Les (A_k) sont incompatibles deux à deux, et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{j} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

Ainsi, $(A_k)_{k\geqslant 1}$ forme bien un système quasi-complet d'événements.

Soit à présent N l'événement « la boule tirée est noire ». On applique la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet d'événements précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap N) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(N) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \times \frac{1}{k} \quad \text{(si } A_k \text{ se réalise, on a } k \text{ boules dans l'urne, dont 1 blanche)} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k}{k} \\
&= \frac{1}{5}\left(-\ln\left(1-\frac{5}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\ln(6)}{5}
\end{aligned}$$

28

Dans une salle de jeux, il y a trois machines M_1, M_2 et M_3. Les deux premières machines permettent de gagner avec une probabilité de 1/4. La troisième machine est truquée et fait perdre à coup sûr. Un joueur non averti choisit une machine au hasard et joue plusieurs fois de suite avec la même machine.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il perde : au 1er coup ? au 2ème coup ? 2 coups de suite ? n coups de suite ?
2. Ayant perdu 2 coups de suite, quelle est la probabilité pour qu'il ait joué avec la machine truquée ?

1. Notons simplement pour $k \in \{1, 2, 3\}$, M_k « le joueur choisit la machine M_k », et pour tout $j \geqslant 1$, notons A_j « le joueur perd la j-ième partie ».

   D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (M_1, M_2, M_3), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(M_1 \cap A_1) + \mathbb{P}(M_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(M_3 \cap A_1) \\ &= \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}(A_1) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}_{M_2}(A_1) + \mathbb{P}(M_3)\mathbb{P}_{M_3}(A_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

   De même,

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}(A_2) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}_{M_2}(A_2) + \mathbb{P}(M_3)\mathbb{P}_{M_3}(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}_{M_2}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(M_3)\mathbb{P}_{M_3}(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \times (1)^2 = \frac{17}{24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) &= \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}_{M_2}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) + \mathbb{P}(M_3)\mathbb{P}_{M_3}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \times (1)^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\end{aligned}$$

2.

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(M_3) = \frac{\mathbb{P}(M_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \frac{\mathbb{P}(M_3) \times \mathbb{P}_{M_3}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{17}{24}} = \frac{8}{17}$$

29

On considère une suite infinie d'urnes $(U_n)_{n\geqslant 2}$, chaque urne contient des boules blanches et des boules noires. On tire une boule dans U_2, puis une boule dans U_3, etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.
On note pour $n \geqslant 2$, A_n « les tirages dans les urnes 2 à n n'amènent que des boules blanches ».

1. On suppose que pour tout $n \geqslant 2$, U_n contient n boules dont une seule noire.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
   (b) En déduire la probabilité de ne jamais tirer de boule noire.
2. On suppose que pour tout $n \geqslant 2$, U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la probabilité de ne jamais tirer de boule noire.

1. (a) Notons N_k (respectivement B_k) l'événement « tirer une boule noire (resp. blanche) dans l'urne U_k ».

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

   (b) Notons J l'évenement « ne jamais tirer de boule noire ». Alors $J = \displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$, et remarquons que la suite (A_n) est décroissante, puisque $\forall n \geqslant 2,\ A_{n+1} \subset A_n$. On a donc, par théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$$

   Presque-sûrement, on tirera une boule noire dans ce jeu.

2. (a) Notons N_k (respectivement B_k) l'événement « tirer une boule noire (resp. blanche) dans l'urne U_k ».

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \cdots \times \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$$

   Remarquons qu'on a des produits télescopiques :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k\times k} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

   (b) Notons J l'évenement « ne jamais tirer de boule noire ». Alors $J = \displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$, et remarquons que la suite (A_n) est décroissante, puisque $\forall n \geqslant 2,\ A_{n+1} \subset A_n$. On a donc, par théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

   Ici, on finit par tirer une boule noire avec probabilité 1/2.