1 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

1. Pour $N\geqslant 2$, on a :
$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{N}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1$.
2. Pour $N\geqslant 1$, on a :
$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)=\ln(N+1)-\ln(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.
3. Pour $N\geqslant 2$, on a :
$$\sum_{n=2}^{N}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=\frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(N+1)}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\ln(2)}$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln(2)}$.
4. Pour $N\geqslant 0$, on a :
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=1-\frac{1}{2N+3}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=1$.
5. Pour $N\geqslant 1$, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)&=\sum_{n=1}^{N}\Big(\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)+\big(\ln(n+1)-\ln(n+2)\big)\Big)\\&=(\ln(N+1)-\ln(1))+(\ln(2)-\ln(N+2))=\ln(2)-\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(2)\end{aligned}$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)=\ln(2)$.

2 Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n n!}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2^n}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3}{5^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{n!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+3n}{2^n}$

1. On reconnaît une série géométrique convergente (car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{2}$.
2. On reconnaît une série géométrique convergente (car $\left|e^{-1}\right|<1$) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\boxed{\frac{e-1}{e}}$.
3. On reconnaît directement une série exponentielle convergente : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n!}=e^{1/2}=\boxed{\sqrt{e}}$.
4. Pour $N\geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{n+2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}e^1+e^2$

   (séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2^n}{n!}=\boxed{e+e^2}$.
5. On reconnaît une série géométrique convergente (car $\left|\frac{1}{5}\right|<1$) :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{5^n}=3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=3\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\boxed{\frac{3}{4}}.$$
6. Pour $N\geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}e^1+e^1$

   (séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}=\boxed{2e}$.
7. Pour $N\geqslant 2$, on a :
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)+n}{n!}=\sum_{n=2}^{N}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n!}=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{k!}+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}e^1+e^1$$
   (séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}=\boxed{2e}$.
8. Pour $n\geqslant 0$, on a :
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2+3n}{2^n}=\sum_{n=0}^{N}(n(n-1)+4n)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+4\times\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$
   (séries géométriques dérivées convergentes). La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+3n}{2^n}$ converge et donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n}{2^n}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times 8+2\times 4=\boxed{12}$$

3 On admet que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leur convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

1. On a : $\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4n^2}$, donc puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$ converge également, et on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\boxed{\frac{\pi^2}{24}}$$
2. On a pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant\frac{1}{(2n+1)^2}\leqslant\frac{1}{(2n)^2}$.
Or, la série de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$ converge, donc par critère de comparaison des suites positives, la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc aussi.
De plus, en séparant tous les termes pairs/impairs, on peut remarquer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\qquad\Longrightarrow\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$
3. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente (puisque $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge), donc converge.
De plus, en séparant une nouvelle fois les termes pairs/impairs, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}=\boxed{-\frac{\pi^2}{12}}$$

4 Soit x un réel fixé. On note $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Justifier que A et B existent.
2. Calculer $A+B$ et $A-B$. En déduire les valeurs de A et B.

1. Soit x réel. On a :
$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{(x^2)^n}{(2n)!} \leqslant \frac{(x^2)^n}{n!}$$
Or, la série de terme général $\dfrac{(x^2)^n}{n!}$ converge (série exponentielle), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ est bien convergente. La somme A existe bien.

De même, pour tout réel x, On a :
$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{(x^2)^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{(x^2)^n}{n!}$$
Or, la série de terme général $\dfrac{(x^2)^n}{n!}$ converge (série exponentielle), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ est bien convergente, et donc la série de terme général $x \times \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge finalement aussi. La somme B existe bien.

2. Remarquons que, en regroupant A et B, on obtient :
$$A+B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$
De même remarquons que :
$$A-B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = e^{-x}$$
On a donc :
$$\begin{cases} A+B = e^x \\ A-B = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2A = e^x + e^{-x} \\ 2B = e^x - e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ B = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$
Ainsi :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$
et
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

5 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $2^{2n-1}e^{-n}$
4. $\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
5. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
6. $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
7. $\ln\left(\dfrac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)$
8. $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
9. $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$
10. $\left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On rappelle qu'au voisinage de 0*, on a :* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Remarque : Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'à la nature des séries, donc inutile de regarder la somme partielle. Il suffit d'utiliser un critère de comparaison, d'équivalence, de négligeabilité, pour conclure à la convergence/divergence de la série rapidement.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$
   Or, la série de terme général $1/n$ diverge (série harmonique), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est donc divergente.
2. $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$, donc nécessairement la série diverge grossièrement (puisque le terme général ne tend même pas vers 0).
3. $2^{2n-1}e^{-n} = \dfrac{2^{2n-1}}{e^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{e}\right)^n$. C'est le terme général d'une série géométrique, de raison $\dfrac{4}{e} > 1$, donc la série <u>diverge</u>.
4. $\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Pour tout $n \geqslant 1$,
   $$0 \leqslant \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$
   Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ <u>converge</u> aussi.
5. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
   $$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
   Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ est de même nature, donc <u>converge</u> aussi.
6. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
   $$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
   Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ est de même nature, donc <u>converge</u> aussi.
7. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
   $$\ln\left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{e^{2n}+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2n}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2n}} = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$

Or, la série de terme général $\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $\left|\frac{1}{e^2}\right| < 1$), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)$ est de même nature, donc converge aussi.

8. Pour tout $n \geqslant 3$ (on a donc $n > e$), on a :
$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$
Or, la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge aussi.

9. Remarquons que :
$$\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n}) \implies \frac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) \implies \frac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère de négligeabilité de suites positives, la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge aussi.

10. Sachant que $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$, on a :
$$\left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$
Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ converge aussi.

6

1. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{k^2}$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt + 1$$
Conclure que la série de terme général $1/k^2$ est convergente, et donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $k \geqslant 1$.
Sur le segment $[k, k+1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante, donc :
$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$
Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens), on a :
$$\frac{1}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} 1 dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} 1 dt$$
autrement dit :
$$\boxed{\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{k^2}}$$
2. Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'inégalité de droite précédente pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
et donc par relation de Chasles sur les intégrales,
$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$
De même, en sommant l'inégalité de gauche de la question 1 pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt$$
autrement dit par changement d'indice dans la première somme, et relation de Chasles sur les intégrales :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt \Longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt + 1}$$
On a donc bien montré que : pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt + 1$$

En notant pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, on a donc montré que :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc en particulier :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2$$

La suite (S_n) est donc croissante, et majorée par 2, donc converge vers une limite finie.
La série de terme général $1/k^2$ est donc bien convergente, et par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on en déduit que :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$$

7

1. (a) Pour tout $k \geqslant 2$, montrer que :
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$
(b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, et déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

2. Montrer, en utilisant une méthode analogue de comparaison somme/intégrale, que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge.

1. (a) Soit $k \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :
$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$
Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),
$$\boxed{\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}}$$
(b) Soit $n \geqslant 3$. En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in [\![2, n]\!]$, on :
$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$
En sommant l'inégalité de gauche du 1(a) pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a :
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt$$
et finalement :
$$\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt + \frac{1}{2\ln(2)}}$$
Or, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)} = \frac{1/t}{\ln(t)}$ sur $[2; +\infty[$ est $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)) = \ln(\ln(t))$. On peut donc dire que :
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$
Les deux membres encadrant $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ sont équivalents à $\ln(\ln(n))$, donc par encadrement :
$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))}$$
et en particulier, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$ et la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

2. Soit $k \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leqslant \frac{1}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln^2(k)}$$

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt \leqslant \frac{1}{k\ln^2(k)}}$$

Soit à présent $n \geqslant 3$.En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in [\![2, n]\!]$, on :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)}$$

En sommant l'inégalité de gauche du 1(a) pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$$

et finalement :

$$\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}dt + \frac{1}{2\ln^2(2)}}$$

Or, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)} = \dfrac{1/t}{\ln^2(t)}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln(t)}$. On peut donc dire que :

$$\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)}$ pour tout $n \geqslant 3$.

La suite (S_n) est donc croissante (somme de termes positifs), et la suite (S_n) est majorée par $\dfrac{1}{\ln(2)} + \dfrac{1}{2\ln^2(2)}$, donc la suite (S_n) converge.

La série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ est donc bien convergente.

8 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Soit $k \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}}$$

Soit $n \geqslant 2$.

En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on :

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

En sommant l'inégalité de gauche précédente pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t}dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t}dt$$

et finalement :

$$\boxed{\int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t}dt + 1}$$

autrement dit :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$$

Les deux membres encadrant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ étant équivalents à $\ln(n)$, on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

9 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que pour tout réel $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Raisonnons par disjonction de cas:

<u>Soit $\alpha \in [0,1[$.</u>

Soit $k \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur le segment $[k,k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k,k+1],\ \ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}}$$

Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in [\![1,n]\!]$, on :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

En sommant l'inégalité de gauche précédente pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt + 1}$$

autrement dit :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1$$

Les deux membres encadrant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ étant équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

<u>Soit $\alpha < 0$.</u>

Soit $k \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est croissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha}}$$

Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'inégalité de gauche précédente, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

En sommant l'inégalité de droite précédente pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}, \quad \text{autrement dit :} \quad \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt}$$

autrement dit :

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Les deux membres encadrant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ étant équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

10 Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 4/9$ et :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

Montrer que la série de terme général a_n converge, et vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire double.
L'équation caractéristique associée est $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \iff x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$, qui admet deux solutions réelles : $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{-1}{3}$. Ainsi, il existe deux constantes α et β telles que :

$$\forall n \geqslant 1, a_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On voit donc déjà que a_n est la somme de termes généraux de séries géométriques convergentes, donc la série de terme général a_n va bien être convergente.

Remarquons que

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 4/9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0 \\ \frac{4}{9}\alpha + \frac{1}{9}\beta = \frac{4}{9} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2/3 \\ \beta = 4/3 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

De plus, on a en reconnaissant des séries géométriques convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} - 4\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{1}$$

11 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. On procède par récurrence.

   - On sait que $u_0 = 1 > 0$.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé, supposons que pour cet entier n, on ait $u_n > 0$.
     On aimerait montrer que $u_{n+1} > 0 \iff \ln(e^{u_n} - u_n) > 0 \iff e^{u_n} - u_n > 1$.

     Posons $\varphi : x \mapsto e^x - x$.
     La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, \varphi'(x) = e^x - 1 > 0$. La fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, or $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1$, donc $\forall x > 0, \varphi(x) > 1$:

     $$\forall x > 0,\ e^x - x > 1$$

     donc, puisque par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a $e^{u_n} - u_n > 1$, donc $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) > 0$.

   - Finalement, par récurrence, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) = \ln\left(e^{u_n}\left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)\right) = u_n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)$$

   Ainsi :

   $$u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) < 0$$

   (car $u_n > 0$, donc $1 - \frac{u_n}{e^{u_n}} < 1$).
   La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
   Par passage à la limite dans la formule de récurrence de (u_n), on obtient que :

   $$\ell = \ln(e^\ell - \ell) \iff e^\ell = e^\ell - \ell \iff \ell = 0$$

   La suite (u_n) est donc convergente vers 0.

3. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) \iff e^{u_{n+1}} = e^{u_n} - u_n \iff u_n = e^{u_n} - e^{u_{n+1}}$$

   Soit $N \geqslant 0$. On a :

   $$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (e^{u_n} - e^{u_{n+1}}) = e^{u_0} - e^{u_{N+1}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} e^1 - e^0$$

   Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e - 1$.

12 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

1. Par récurrence montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
   - Par définition $0 < u_0 < 1$.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour cet entier n, on ait $0 < u_n < 1$.
     Alors $u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \in]0,1[$ (comme produit de deux nombres de $]0,1[$).
   - Par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

   La suite (u_n) est donc minorée par 0, et décroissante (puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$), donc converge vers un réel ℓ.

   Par passage à la limite dans l'égalité « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ », on a donc $\ell = \ell - \ell^2$, autrement dit $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$.
   La suite (u_n) converge donc bien vers 0.
2. Pour $N \geqslant 0$, on a :
$$\sum_{k=0}^{N} u_k^2 = \sum_{k=0}^{N} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} u_0$$
   Ainsi, la série $\sum u_n^2$ converge bien, et on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0$$

13 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

1. Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   On a alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e^{u_n}} < 1$$
   la suite (u_n) est donc décroissante, et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ.
   Par passage à la limite dans l'égalité « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ », on a :
   $$\ell = \ell e^{-\ell} \iff \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \iff \ \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 \ \iff \ell = 0$$
   La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :
   $$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \iff \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(e^{-u_n}) \iff v_{n+1} = v_n - u_n \iff u_n = v_n - v_{n+1}$$
   Ainsi :
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$
3. On a donc pour $n \geq 0$:
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1} = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   (car $u_n \to 0^+$, donc $\ln(u_n) \to -\infty$).
   Ainsi, la série de terme général u_n est donc divergente.

14 Soit α un réel et n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \qquad \sum \ln(x_n), \qquad \sum \ln(1+x_n^\beta) \quad (\text{avec } \beta \in \mathbb{R}), \qquad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

1. Soit α un réel. Pour $n \geqslant 1$, notons pour $x \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n + n^\alpha x - 1$.
   La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ (somme de fonctions continues), strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (comme somme de fonctions strictement croissantes), donc f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f_n([0,+\infty[) = [f_n(0), \lim\limits_{+\infty} f_n[= [-1,+\infty[$.
   Comme $0 \in [-1,+\infty[= f_n([0,+\infty[)$, il existe un unique $x_n \in [0,+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

$$\exists ! x_n \in [0,+\infty[\ / \ (x_n)^n + n^\alpha x_n - 1 = 0$$

2. Raisonnons par dijonction de cas:
   - Si $\alpha > 0$. On a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1-x_n^n}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$
   Puisque la suite (x_n) est positive, par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
   La suite (x_n) converge vers 0.
   - Si $\alpha = 0$, on a pour tout $n > 0$, $f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 = 0$.
   et $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n + (1 - x_{n+1}^{n+1}) - 1 = x_{n+1}^n(1-x_{n+1}) = x_{n+1}^n \times x_{n+1}^{n+1} \geqslant 0$, donc $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$, la fonction f_n étant croissante, on a donc $x_{n+1} \geqslant x_n$, donc la suite (x_n) est croissante, majorée par 1, elle converge vers un réel ℓ tel que $0 < x_n \leqslant 1$.
   Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 1$, alors $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) < 0$, et alors $x_n^n = \exp(n\ln(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui contredit que $x_n^n = 1 - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \ell \neq 0$.
   Ainsi, nécessairement, (x_n) converge vers 1.

3. (a) D'après la question précédente, on sait que pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ et :
   $$x_n = \frac{1-x_n^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$
   (b)
   - On sait que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. Les deux suites étant positives, on applique le critère d'équivalence pour les suites positives :
   $$\sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$
   - On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = -\infty$, donc on a nécessairement (car le terme général ne tend pas vers 0) :
   $$\sum_{n\geqslant 1} \ln(x_n) \text{ diverge}$$
   - Soit $\beta \in \mathbb{R}$.
     ⋆ Si $\beta \leqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^\beta \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+x_n^\beta) \neq 0$, donc :
   $$\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+x_n^\beta) \text{ diverge}$$

⋆ Si $\beta > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^\beta = 0$ et :

$$\ln(1 + x_n^\beta) \underset{n \to +\infty}{\sim} x_n^\beta \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha\beta}}$$

Les deux suites étant positives, on applique le critère d'équivalence pour les suites positives :

$$\sum_{n \geqslant 1} \ln(1 + x_n^\beta) \text{ converge } \iff \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha\beta}} \text{ converge } \iff \alpha\beta > 1$$

- Enfin, on sait que $x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n^\alpha}$, donc :

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} - x_n = \frac{x_n^n}{n^\alpha} \leqslant x_n^n < \frac{1}{n^{\alpha n}}$$

Pour n assez grand, on a $\alpha n > 2$, donc à partir d'un certain rang, on aura :

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} - x_n < \frac{1}{n^2}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), le Théorème de Comparaison des suites positives nous permet de conclure :

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - x_n \right) \text{ converge}$$

et donc également :

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha} \right) \text{ converge}$$

$\boxed{15}$ Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Montrer que (u_n) décroît à partir du rang 3.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n,\ \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right),\ \sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n},\ \sum_{n\geqslant 1} u_n^2,\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$$

1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :
   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
   Sur $[e,+\infty[$, la fonction f est décroissante, et donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 3 \geqslant e$.
2.
   - Pour $n \geqslant 3$, on a :
     $$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} > 0$$
     Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc par comparaison de suites positives, la série $\sum u_n$ diverge également.
   - Pour $N \geqslant 2$, on a :
     $$\sum_{k=2}^{N} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=2}^{N} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
     (car (u_n) converge vers 0 par croissances comparées). Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
   - Puisque (u_n) converge vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = 1$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{u_n}$ diverge grossièrement (puisque le terme général ne tend même pas vers 0).
   - Puisque (u_n) converge vers 0, on a :
     $$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$
     Donc par critère d'équivalence de suites positives, les séries $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature, donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ diverge.
   - On a $u_n^2 = \dfrac{\ln^2(n)}{n^2}$. On a :
     $$\ln^2(n) = o(\sqrt{n}) \Longrightarrow \frac{\ln^2(n)}{n^2} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) \Longrightarrow u_n^2 = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
     Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère de négligeabilité de suites positives, la série $\sum u_n^2$ est convergente également.
   - La série $\sum (-1)^n u_n$ n'est pas absolument convergente.

     Regardons si elle converge en étudiant la suite des sommes partielles.
     Posons $S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} (-1)^k u_k$.
     On a $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.

On a $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0$, donc (S_{2n+1}) est croissante.
On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers une même limite, ce qui prouve que (S_n) converge, et donc la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

16

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{t^n-1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt.$$
3. Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n}$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$.

1. Il suffit de remarquer que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a :
$$\frac{t^n-1}{1-t} + \frac{1}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$$
2. En remarquant que $\displaystyle\frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ (somme des termes d'une suite géométrique), on a :
$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt + \int_0^{1/2} \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t}dt$$
autrement dit :
$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/2} t^k dt = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^{1/2}$$
autrement dit :
$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt.$$
3. Pour $n \geqslant 1$, on a :
$$0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} \leqslant \int_0^{1/2} \frac{t^n}{\frac{1}{2}}dt = 2\int_0^{1/2} t^n dt = 2\left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\right)$$
Donc par encadrement, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt = 0$$
Ainsi, d'après la question 2, on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \ln(2)$$
autrement dit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

17 Pour tout $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$, on note : $v_n(x) = \dfrac{1-\exp(-nx)}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$
2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1,1[$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$
montrer que
$$f(x) = (1-\exp(x))\ln(1-\exp(-x))$$

1. Pour $x > 0$ et n grand, on a :
$$v_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
Or, la série de terme général $1/n^2$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, on en déduit que la série de terme général $v_n(x)$ est de même nature, donc converge également.
2. Soit $N \geqslant 1$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} v_k(x) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1-e^{-kx}}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (1-e^{-kx})\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{e^{-kx}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k+1}\right)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{-kx}}{k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{-kx}}{k+1} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(e^{-x})^k}{k} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{e^{-(k-1)x}}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(e^{-x})^k}{k} + e^x \sum_{k=2}^{N+1} \frac{e^{-kx}}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(e^{-x})^k}{k} + e^x \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(e^{-x})^k}{k} - e^{-x}\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 - \Big(-\ln(1-e^{-x})\Big) + e^x\Big(-\ln(1-e^{-x}) - e^{-x}\Big) = \boxed{(1-e^x)\ln(1-e^{-x})}
\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\forall x > 0,\ f(x) = (1-\exp(x))\ln(1-\exp(-x))$$

18 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2. En utilisant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de I_n.

   En déduire la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$
Ainsi, par encadrement, on a bien que (I_n) converge vers 0.

2. En utilisant la formule proposée,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}dt = -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^{k}\right) dt \\ &= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}dt = -\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = -\ln(2) + (-1)^n I_n\end{aligned}$$
Comme (I_n) converge vers 0, par produit avec une suite bornée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n I_n = 0$.
Finalement :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$$
La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge donc, et on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

3.
$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
Or, la série de terme général $1/n^2$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|$ converge, donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente, donc converge.
Pour $N \geqslant 1$, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2) + (-\ln(2)+1)\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln(2)$$