$\boxed{1}$

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$).
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $E \neq \emptyset$, puisque la matrice nulle O vérifie bien $AO = OA$, donc $O \in E$.
- Soient M_1 et M_2 deux matrices de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda M_1 A + M_2 A = (\lambda M_1 + M_2)A$$

Ainsi, $\lambda M_1 + M_2 \in E$.
L'ensemble E est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc c'est un espace vectoriel.

2

Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée uniquement de matrices inversibles.

Prenons des matrices triangulaires sans zéro sur la diagonale pour être assuré qu'elles soient inversibles.

- On peut déjà prendre $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien inversible.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A est triangulaire (car diagonale) sans zéro sur la diagonale, donc A est bien inversible. De plus, I et A étant non colinéaires, (I, A) est libre.
- Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice B est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc B est inversible. De plus, clairement $B \notin Vect(I, A)$ (à cause du coefficient $b_{1,2}$), donc (I, A, B) est libre.
- Posons $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice C est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc C est inversible. De plus, clairement $C \notin Vect(I, A, B)$ (à cause du coefficient $c_{2,1}$), donc (I, A, B, C) est libre.

Ainsi, la famille $(I, A, B, C) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de cardinal 4, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, c'est bien une base, et elle composée uniquement de matrices inversibles.

3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$. Montrer que f est linéaire, déterminer son image, son noyau, son rang, et la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AM$.
  Montrons que f est linéaire.

  Soient M_1 et $M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

  Ainsi, f est bien une application linéaire.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

  Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix},\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

  L'application f est donc surjective, et son rang vaut 4.
- Par théorème du rang, $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. L'application f est donc injective.
  Remarque: Rien d'étonnant puisqu'en dimension finie un endomrophisme est surjectif si et seulement s'il est injectif, si et seulement s'il est bijectif.
- D'après l'expression de $f(M)$ calculée précédemment, on obtient :
  - $\star$ $f(E_{1,1}) = -E_{2,1}$.
  - $\star$ $f(E_{1,2}) = -E_{2,2}$.
  - $\star$ $f(E_{2,1}) = E_{1,1}$.
  - $\star$ $f(E_{2,2}) = E_{1,2}$.

  Ainsi, la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(0) = 0\}$
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
4. $I = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + (b-2a)x + a - b + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

1. $F = \left\{ax^3 + bx^2 + cx, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = Vect(x^3, x^2, x)$.
   F est donc directement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$, donc c'est un espace vectoriel.
   La famille (x^3, x^2, x) étant libre (issue de la base canonique), c'est une base de F. On a donc $\dim(F) = 3$.

2. $G = \left\{(x-1)^2(ax+b), a, b \in \mathbb{R}\right\} = Vect\Big(x(x-1)^2, (x-1)^2\Big)$.
   G est donc directement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$, donc c'est un espace vectoriel.
   La famille $\Big(x(x-1)^2, (x-1)^2\Big)$ est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de G. On a donc $\dim(G) = 2$.

3. Soit $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a :
   $$P \in H \Longleftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = -3a - 2b \end{cases}$$
   Finalement :
   $$H = \left\{ax^3 + bx^2 + (-3a-2b)x, a, b \in \mathbb{R}\right\} = Vect\Big(x^3 - 3x, x^2 - 2x\Big)$$
   H est donc directement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$, donc c'est un espace vectoriel.
   La famille $\Big(x^3 - 3x, x^2 - 2x\Big)$ est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de H. On a donc $\dim(H) = 2$.

4. $$I = \{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect\Big(x^2 - 2x + 1\ ,\ x - 1,\ \ ,1\Big)$$
   Donc directement, I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$, donc c'est un espace vectoriel.
   La famille $\Big(x^2 - 2x + 1\ ,\ x - 1,\ \ ,1\Big)$ est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de I. On a donc $\dim(I) = 3 = dim(\mathbb{R}_2[x])$ donc $I = \mathbb{R}_2[x]$.

5

1. La famille $(x, x+1, x^2-1)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[x]$?
2. La famille $(3x^2+x+2, 3x^2+x+1, 2x^2+x+1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?
3. La famille $(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[x]$?
4. Montrer que la famille $(x^2+x+1, 2x^2+3x+4, -x^2+x+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Montrer que la famille $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

1. $(x, x+1)$ est libre puisque les deux polynômes sont non proportionnels.
   De plus, vu les degrés, $x^2-1 \notin Vect(x, x+1)$. Donc $(x, x+1, x^2-1)$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(3x^2+x+2)+b(3x^2+x+1)+c(2x^2+x+1)=0$.
   Alors, on a $(3a+3b+2c)x^2+(a+b+c)x+(2a+b+c)=0$.
   Par identification, on a donc nécessairement :
   $$\begin{cases} 3a+3b+2c=0 \\ a+b+c=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3b+2c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$
   La famille $(3x^2+x+2, 3x^2+x+1, 2x^2+x+1)$ est donc libre dans $\mathbb{R}_2[x]$, et de cardinal 3 sachant que $\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$(*) \quad : \qquad ax^3+bx^2(x-2)+cx(x-2)^2+d(x-2)^3=0_{\mathbb{R}[x]}$$
   Alors, cela signifie que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ at^3+bt^2(t-2)+ct(t-2)^2+d(t-2)^3=0$$
   En particulier, pour $t=2$ et $t=0$, on obtient que $a=0$ et $d=0$.

   En revenant à $(*)$, on a donc :
   $$bx^2(x-2)+cx(x-2)^2=0_{\mathbb{R}[x]}, \qquad \text{autrement dit :} \qquad x(x-2)\Big(bx+c(x-2)\Big)=0_{\mathbb{R}_{\not\asymp}[x]}$$
   Puisque $x(x-2)$ n'est pas le polynôme nul, on a forcément :
   $$bx+c(x-2)=0_{\mathbb{R}[x]}$$
   autrement dit, en identifiant les coefficients, on a : $(b+c)=0$ et $-2c=0$, donc $b=c=0$.

   Finalement, la famille $(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3)$ est bien libre, et de cardinal 4, dans $\mathbb{R}_3[x]$ de dimension 4, donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
4. Les trois polynômes sont bien dans $\mathbb{R}_2[x]$ et le cardinal de la famille vaut la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$. Il suffit donc de vérifier que la famille est libre.
   $(x^2+x+1, -x^2+x+1)$ est bien libre (les deux polynômes sont non proportionnels).
   De plus, $2x^2+3x+4 \notin Vect(x^2+x+1, -x^2+x+1)$ (à cause des termes en x et 1), donc la famille $(x^2+x+1, -x^2+x+1, 2x^2+3x+4)$ est bien libre. C'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Soit P un polynôme de degré n. Alors P' est de degré $n-1$, P'' est de degré $n-2$, ..., $P^{(n)}$ est constant donc de degré 0.
   Finalement, la famille $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ comporte $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[x]$, tous de degrés distincts, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

6

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x] \ / \ P(0) = 0\}$ et $G = Vect(x^2 + 1)$. Montrer que $\mathbb{R}_4[x] = F \oplus G$.

$F = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx, a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = Vect(x^4, x^3, x^2, x)$, donc $\dim(F) = 4$.

$G = Vect(x^2 + 1)$, donc $\dim(G) = 1$.

Puisque $\dim(G) = 1$, on ne peut avoir que $\dim(F \cap G) = 0$ ou $\dim(F \cap G) = 1$.
Si $\dim(F \cap G) = 1 = \dim(G)$, on aurait $F \cap G = G$ et donc $G \subset F$. Or, $x^2 + 1 \in G$ mais $x^2 + 1 \notin F$ (puisque le polynôme $x^2 + 1$ ne s'annule pas en 0). Donc finalement $F \cap G = \{0\}$.

Finalement, F et G sont bien en somme directe, et on a $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 4 + 1 = 5 = \mathbb{R}_4[x]$, donc $F \oplus G = \mathbb{R}_4[x]$.

$\boxed{7}$

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$.
Soit $F = Vect(P_1, P_2, P_3)$ avec : $P_1 = 2x^2 - x + 1,\ P_2 = x^3 + x^2 + 1,\ P_3 = x^3 - x^2 + x$.
Soit $G = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$.
Déterminer une base et la dimension de F, G, $F + G$, $F \cap G$.

- La famille (P_1, P_2, P_3) est liée car :

$$P_3 = x^3 - x^2 + x = (x^3 + x^2 + 1) - (2x^2 - x + 1) = P_2 - P_1$$

  Ainsi, $F = Vect(P_1, P_2)$ et (P_1, P_2) libre puisque polynômes non nuls de degrés distincts, donc (P_1, P_2) est une base de F : $\dim(F) = 2$.

- $G = \big\{(x-1)(ax^2 + bx + c), a, b, c \in \mathbb{R}\big\} = Vect\Big(x^2(x-1), x(x-1), x-1\Big)$. La famille génératrice proposée est nécessairement libre, les polynômes étant tous non nuls de degrés différents.
  Ainsi, $\Big(x^2(x-1), x(x-1), x-1\Big)$ est une base de G et $\dim(G) = 3$.

- On sait que $G \subset F + G \subset E$, donc $3 \leqslant \dim(F + G) \leqslant 4$.
  Si $\dim(F + G) = 3$, on aurait $F + G = G$, donc $F \subset G$. Or, le polynôme $P_1 = 2x^2 - x + 1 \in F$, mais $P_1(1) \neq 0$, donc $P_1 \notin G$.

  On a donc nécessairement $\dim(F + G) = 4$ et donc $F + G = \mathbb{R}_3[x]$.

- Par la formule de Grassmann, on sait déjà que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, donc $\dim(F \cap G) = 1$.

  Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. Alors :

$$\begin{aligned}
P \in F \cap G &\iff \begin{cases} P = a(2x^2 - x + 1) + b(x^3 + x^2 + 1), a, b \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad P(1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P = a(2x^2 - x + 1) + b(x^3 + x^2 + 1), a, b \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad 2a + 3b = 0 \end{cases} \\
&\iff P = a(2x^2 - x + 1) - \frac{2}{3}a(x^3 + x^2 + 1), a \in \mathbb{R} \\
&\iff P = a\left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + \frac{1}{3}\right),\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

  Finalement :

$$F \cap G = Vect\left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + \frac{1}{3}\right) = Vect\Big(2x^3 - 4x^3 + 3x - 1\Big)$$

$\boxed{8}$

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau, leur image, leur rang et leur matrice canonique associée.

1. $f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x],\ P \mapsto P'$
2. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ P \mapsto P'$
3. $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto (P(0), P(1), P'(1))$.
4. $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x],\ P \mapsto \Big(x \mapsto P(x) + (x-2).P'(x)\Big)$

1. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_4[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi, f est bien linéaire.

$P \in \text{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff P' = 0 \iff P$ constant. Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$$

De plus, puisque $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ est la base de $\mathbb{R}_4[x]$, on a :

$$\text{Im}(f) = Vect(f(1), f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4)) = Vect(0, 1, 2x, 3x^2, 4x^3) = Vect(1, x, x^2, x^3) = \mathbb{R}_3[x]$$

La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[x]$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. f est exactement la restriction de celle de la question 1 à $\mathbb{R}_2[x]$, donc f est encore linéaire. On a encore $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$ et $\text{Im}(f) = Vect(f(1), f(x), f(x^2)) = Vect(0, 1, 2x) = Vect(1, x) = \mathbb{R}_1[x]$.
La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda P+Q) = \Big((\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)(1), \lambda P+Q)'(1)\Big) = \lambda\Big(P(0), P(1), P'(1)\Big) + \Big(Q(0), Q(1), Q'(1)\Big) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi, f est bien linéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. Alors :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \iff P = ax(x-1)^2, a \in \mathbb{R}$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = Vect\Big(x(x-1)^2\Big)$$

Par théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = 3$, et donc on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. L'application f est surjective.

Prenons la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.

- $f(1) = (1, 1, 0)$
- $f(x) = (0, 1, 1)$
- $f(x^2) = (0, 1, 2)$
- $f(x^3) = (0, 1, 3)$.

La matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathbb{R}^3$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + (x-2)(\lambda P + Q)' = \lambda\Big(P + (x-2)P'\Big) + \Big(Q + (x-2)Q'\Big) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc f est bien linéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P + (x-2)P' = 0 \iff \Big((x-2)P\Big)' = 0 \iff (x-2)P \text{ constant} \iff P = 0$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, l'application f est injective.
Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[x]$.
Prenons la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.

- $f(1) = 1$
- $f(x) = x + (x-2) = 2x - 2$
- $f(x^2) = x^2 + (x-2)2x = 3x^2 - 4x$
- $f(x^3) = x^3 + (x-2)3x^2 = 4x^3 - 6x^2$.

La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9

Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. Soit $u = (1, 2, -1)$. Montrer que (u) est une base de $\text{Ker}(f)$.
2. Soient $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $mat_{\mathcal{B}'}(f)$
4. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$.

1. On a :
$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Donc on a bien le vecteur u qui appartient à $\text{Ker}(f)$, ce qui prouve déjà que $\dim(\text{Ker}(f)) \geqslant 1$.
Comme $\text{Im}(f) = Vect\left((1, -2, 1), (-1, 0, 1), (-1, -2, 3)\right)$ et que les deux premiers vecteurs forment une famille libre (ils ne sont pas colinéaires), on a $\dim(\text{Im}(f)) \geqslant 2$ et alors d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) \leqslant 1$.
Finalement, on a exactement $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et ainsi $\text{Ker}(f) = Vect(u)$.
2. On a :
$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
On a donc $f(v) = v$.
De même,
$$M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On a donc également $f(w) = w$.
3. Pour vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que (u, v, w) est libre (elle est de cardinal 3). On a :
$$au + bv + cw = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = 0$$
Ainsi famille $\mathcal{B}'$ est libre, et est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et dans cette base :
$$mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. On a montré que $v = f(v)$ et $w = f(w)$, ce qui prouve que $v \in \text{Im}(f)$ et $w \in \text{Im}(f)$. La famille (v, w) étant libre (car extraite d'une base), et $\text{Im}(f)$ étant de dimension 2 (car le rang est égal à 2), on a donc :
$$\text{Im}(f) = Vect(v, w)$$
Puisque $v - f(v) = 0$, et $w - f(w) = 0$, on a bien que $v \in \text{Ker}(Id - f)$ et $w \in \text{Ker}(Id - f)$, et ainsi par stabilité par combinaison linéaire : $\text{Im}(f) = Vect(v, w) \subset \text{Ker}(Id - f)$.
De plus, soit $x \in \text{Ker}(Id - f)$. On a alors $(Id - f)(x) = 0$, soit $x = f(x) \in \text{Im}(f)$, ce qui prouve que $\text{Ker}(Id - f) \subset \text{Im}(f)$.
Par double inclusion, on a finalement que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$.

10

On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$, $f(P) = P(x+1)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$ et déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

1. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

   $$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(x+1) = \lambda P(x+1) + Q(x+1) = \lambda f(P) + f(Q)$$

   Ainsi, f est bien une application linéaire.
   De plus, si $P \in \mathbb{R}_3[x]$, alors $P(x+1)$ est encore un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$, donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

   Écrivons la matrice de f dans la base canonique.
   - $f(1) = 1$
   - $f(x) = x + 1$
   - $f(x^2) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
   - $f(x^3) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

   La matrice A de f dans la base canonique est donc :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Remarquons que c'est en fait le début du triangle de Pascal.
2. La matrice A est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc est bien inversible.
   Remarquons que cela traduit également le fait que f est un isomorphisme.
   Pour déterminer A^{-1}, on peut plutôt regarder l'application f^{-1}. Ici, f^{-1} est évident, c'est :

   $$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ Q & \longmapsto & Q(x-1) \end{array}$$

   - $f^{-1}(1) = 1$
   - $f^{-1}(x) = x - 1$
   - $f^{-1}(x^2) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
   - $f^{-1}(x^3) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

   et donc A^{-1} étant la matrice de f^{-1} dans la base canonique, on a :

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{11}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une de ses bases. On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(e_i) = e_{i+1}$ et $\varphi(e_4) = e_1$.

1. Montrer que φ est un automorphisme et donner $mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.
2. Déteminer φ^{-1} et en déduire la valeur de A^{-1}.

1. On a $\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) = (e_2, e_3, e_4, e_1)$.
   φ envoyant une base de $\mathbb{R}^4$ sur une base de $\mathbb{R}^4$, c'est bien un automorphisme, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. On a directement :
$$\varphi^{-1}(e_1) = e_4, \quad \varphi^{-1}(e_2) = e_1, \quad \varphi^{-1}(e_3) = e_2, \quad \varphi^{-1}(e_4) = e_3$$
   et la matrice de l'application φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ (qui est alors la matrice A^{-1}) est finalement :
$$A^{-1} = mat_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12

Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit g la restriction de f à $\mathrm{Ker}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et que $rg(g) \leqslant rg(f)$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

1. Par définition, on a :
$$g : \begin{array}{ccl} \mathrm{Ker}(f^2) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
Soit $u \in \mathrm{Im}(g)$.
Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ tel que $u = g(x)$.
Or, $u = g(x) = f(x)$, donc $u \in \mathrm{Im}(f)$.
De plus, $f(u) = f(g(x)) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$ (puisque $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$) donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
Finalement :
$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$$
2. Si $x \in \mathrm{Ker}(g)$, on a $g(x) = 0$, et donc $f(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

   Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ (car $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$), donc $g(x)$ a un sens, et alors $g(x) = f(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(g)$.

   Par double inclusion, on a donc montré que :
$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$$
   De plus, d'après la question 1, on a montré que :
$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$$
   donc $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.
3. D'après le théorème du rang pour l'application g, on a :
$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(g)$$
   Or, on a $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. On a donc :
$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$$

13

Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa diagonale, sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible ? Préciser son rang et une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A, et soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme g est-il bijectif ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Puisque $C_1 = C_4$, la matrice A n'est pas inversible.
   On a $\mathrm{Im}(A) = Vect(C_1, C_2, C_3) = 3$ puisque les trois premières colonnes forment une famille libre (on a (C_2, C_3) est clairement libre et $C_1 \notin Vect(C_2, C_3)$). Ainsi, une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(A)$ est :
   $$(u, v, w) \quad \text{avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. Puisque g est la restriction d'une application linéaire, g est bien linéaire. Et puisque $\forall x \in \mathrm{Im}(f)$, $g(x) = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, g est bien un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.
   Ici, $g(u) = f(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u + v + w$, $g(v) = f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v$ et $g(w) = f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w$.
   Ainsi, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est :
   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   La matrice M est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc M est inversible, donc g est bijectif.

14

Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, sur sa dernière ligne et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible ? Préciser son rang et une base $\mathcal{B}$ de $\text{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A, et soit g la restriction de f à $\text{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\text{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme g est-il bijectif ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Puisque $C_1 = C_4$, la matrice A n'est pas inversible.
   On a $\text{Im}(A) = Vect(C_1, C_2, C_3, C_4) = Vect(C_1, C_2) = 2$ puisque $C_2 = C_3$ et $C_1 = C_4$. De plus, (C_1, C_2) libre car C_1, C_2 non colinéaires. Ainsi, une base $\mathcal{B}$ de $\text{Im}(A)$ est :
   $$(u, v) \quad \text{avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Puisque g est la restriction d'une application linéaire, g est bien linéaire. Et puisque $\forall x \in \text{Im}(f)$, $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$, g est bien un endomorphisme de $\text{Im}(f)$.
   Ici, $g(u) = f(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2u + 2v$ et $g(v) = f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u$.
   Ainsi, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est :
   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   La matrice M est de rang 2 (les colonnes sont non proportionnelles) donc M est inversible, donc g est bijectif.