

**1**

Soit  $A$  une matrice fixée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 1$ ).  
On considère l'ensemble  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ .  
Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $E \neq \emptyset$ , puisque la matrice nulle  $O$  vérifie bien  $AO = OA$ , donc  $O \in E$ .
- Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux matrices de  $E$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda M_1 A + M_2 A = (\lambda M_1 + M_2)A$$

Ainsi,  $\lambda M_1 + M_2 \in E$ .

L'ensemble  $E$  est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion :  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc c'est un espace vectoriel.

2

Déterminer une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  formée uniquement de matrices inversibles.

Prenons des matrices triangulaires sans zéro sur la diagonale pour être assuré qu'elles soient inversibles.

- On peut déjà prendre  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui est bien inversible.
- Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  $A$  est triangulaire (car diagonale) sans zéro sur la diagonale, donc  $A$  est bien inversible. De plus,  $I$  et  $A$  étant non colinéaires,  $(I, A)$  est libre.
- Posons  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $B$  est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc  $B$  est inversible. De plus, clairement  $B \notin \text{Vect}(I, A)$  (à cause du coefficient  $b_{1,2}$ ), donc  $(I, A, B)$  est libre.
- Posons  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $C$  est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc  $C$  est inversible. De plus, clairement  $C \notin \text{Vect}(I, A, B)$  (à cause du coefficient  $c_{2,1}$ ), donc  $(I, A, B, C)$  est libre.

Ainsi, la famille  $(I, A, B, C) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille libre de cardinal 4, dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui est de dimension 4, c'est bien une base, et elle composée uniquement de matrices inversibles.

3

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = AM$ . Montrer que  $f$  est linéaire, déterminer son image, son noyau, son rang, et la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = AM$ .  
Montrons que  $f$  est linéaire.

Soient  $M_1$  et  $M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

Ainsi,  $f$  est bien une application linéaire.

- Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors :

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\text{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

L'application  $f$  est donc surjective, et son rang vaut 4.

- D'après le théorème du rang,  $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ , donc  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ . L'application  $f$  est donc injective.

**Remarque:** Rien d'étonnant puisqu'en dimension finie un endomorphisme est surjectif si et seulement s'il est injectif, si et seulement s'il est bijectif.

- D'après l'expression de  $f(M)$  calculée précédemment, on obtient :

- \*  $f(E_{1,1}) = -E_{2,1}$ .
- \*  $f(E_{1,2}) = -E_{2,2}$ .
- \*  $f(E_{2,1}) = E_{1,1}$ .
- \*  $f(E_{2,2}) = E_{1,2}$ .

Ainsi, la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1.  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(0) = 0\}$
2.  $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(1) = P'(1) = 0\}$ .
3.  $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
4.  $I = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + (b - 2a)x + a - b + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$

1.  $F = \{ax^3 + bx^2 + cx, a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect(x^3, x^2, x)$ .

$F$  est donc directement un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[x]$ , donc c'est un espace vectoriel.

La famille  $(x^3, x^2, x)$  étant libre (en tant que sous famille d'une famille libre puisqu'issue de la base canonique), c'est une base de  $F$ . On a donc  $\dim(F) = 3$ .

2.  $G = \{(x - 1)^2(ax + b), a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(x(x - 1)^2, (x - 1)^2)$ .

$G$  est donc directement un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[x]$ , donc c'est un espace vectoriel.

La famille  $(x(x - 1)^2, (x - 1)^2)$  est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de  $G$ . On a donc  $\dim(G) = 2$ .

3. Soit  $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . On a :

$$P \in H \iff \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ c = -3a - 2b \end{cases}$$

Finalement :

$$H = \{ax^3 + bx^2 + (-3a - 2b)x, a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(x^3 - 3x, x^2 - 2x)$$

$H$  est donc directement un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[x]$ , donc c'est un espace vectoriel.

La famille  $(x^3 - 3x, x^2 - 2x)$  est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de  $H$ . On a donc  $\dim(H) = 2$ .

- 4.

$$I = \{ax^2 + (b - 2a)x + a - b + c, a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect(x^2 - 2x + 1, x - 1, 1)$$

Donc directement,  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[x]$ , donc c'est un espace vectoriel.

La famille  $(x^2 - 2x + 1, x - 1, 1)$  est libre (composée de polynômes non nuls de degrés distincts), donc c'est une base de  $I$ . On a donc  $\dim(I) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$  donc  $I = \mathbb{R}_2[x]$ .

5

1. La famille  $(x, x + 1, x^2 - 1)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}_2[x]$  ?
2. La famille  $(3x^2 + x + 2, 3x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_2[x]$  ?
3. La famille  $(x^3, x^2(x - 2), x(x - 2)^2, (x - 2)^3)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_3[x]$  ?
4. Montrer que la famille  $(x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 4, -x^2 + x + 1)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
5. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ . Montrer que la famille  $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$  est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

1.  $(x, x + 1)$  est libre puisque les deux polynômes sont non proportionnels.  
De plus, vu les degrés,  $x^2 - 1 \notin \text{Vect}(x, x + 1)$ . Donc  $(x, x + 1, x^2 - 1)$  est libre.
2. Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a(3x^2 + x + 2) + b(3x^2 + x + 1) + c(2x^2 + x + 1) = 0$ .  
Alors, on a  $(3a + 3b + 2c)x^2 + (a + b + c)x + (2a + b + c) = 0$ .  
Par identification, on a donc nécessairement :

$$\begin{cases} 3a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ 3b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

La famille  $(3x^2 + x + 2, 3x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1)$  est donc libre dans  $\mathbb{R}_2[x]$ , et de cardinal 3 sachant que  $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ , donc c'est une base de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

3. Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(*) : \quad ax^3 + bx^2(x - 2) + cx(x - 2)^2 + d(x - 2)^3 = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

Alors, cela signifie que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad at^3 + bt^2(t - 2) + ct(t - 2)^2 + d(t - 2)^3 = 0$$

En particulier, pour  $t = 2$  et  $t = 0$ , on obtient que  $a = 0$  et  $d = 0$ .

En revenant à  $(*)$ , on a donc :

$$bx^2(x - 2) + cx(x - 2)^2 = 0_{\mathbb{R}[x]}, \quad \text{autrement dit :} \quad x(x - 2) \left( bx + c(x - 2) \right) = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

Puisque  $x(x - 2)$  n'est pas le polynôme nul, on a forcément :

$$bx + c(x - 2) = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

autrement dit, en identifiant les coefficients, on a :  $(b + c) = 0$  et  $-2c = 0$ , donc  $b = c = 0$ .

Finalement, la famille  $(x^3, x^2(x - 2), x(x - 2)^2, (x - 2)^3)$  est bien libre, et de cardinal 4, dans  $\mathbb{R}_3[x]$  de dimension 4, donc c'est une base de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

4. Les trois polynômes sont bien dans  $\mathbb{R}_2[x]$  et le cardinal de la famille vaut la dimension de  $\mathbb{R}_2[x]$ . Il suffit donc de vérifier que la famille est libre.  
 $(x^2 + x + 1, -x^2 + x + 1)$  est bien libre (les deux polynômes sont non proportionnels).  
De plus,  $2x^2 + 3x + 4 \notin \text{Vect}(x^2 + x + 1, -x^2 + x + 1)$  (à cause des termes en  $x$  et 1), donc la famille  $(x^2 + x + 1, -x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 4)$  est bien libre. C'est une base de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
5. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Alors  $P'$  est de degré  $n - 1$ ,  $P''$  est de degré  $n - 2$ ,  $\dots$ ,  $P^{(n)}$  est constant donc de degré 0.  
Finalement, la famille  $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$  comporte  $n + 1$  polynômes non nuls de  $\mathbb{R}_n[x]$ , tous de degrés distincts, donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**6**

Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x] / P(0) = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(x^2 + 1)$ . Montrer que  $\mathbb{R}_4[x] = F \oplus G$ .

$F = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx, a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^4, x^3, x^2, x)$ , donc  $\dim(F) = 4$ .

$G = \text{Vect}(x^2 + 1)$ , donc  $\dim(G) = 1$ .

Puisque  $\dim(G) = 1$ , on ne peut avoir que  $\dim(F \cap G) = 0$  ou  $\dim(F \cap G) = 1$ .

Si  $\dim(F \cap G) = 1 = \dim(G)$ , on aurait  $F \cap G = G$  et donc  $G \subset F$ . Or,  $x^2 + 1 \in G$  mais  $x^2 + 1 \notin F$  (puisque le polynôme  $x^2 + 1$  ne s'annule pas en 0). Donc finalement  $F \cap G = \{0\}$ .

Finalement,  $F$  et  $G$  sont bien en somme directe, et on a  $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 4 + 1 = 5 = \mathbb{R}_4[x]$ , donc  $F \oplus G = \mathbb{R}_4[x]$ .

7

Soit  $E = \mathbb{R}_3[x]$ .Soit  $F = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  avec :  $P_1 = 2x^2 - x + 1$ ,  $P_2 = x^3 + x^2 + 1$ ,  $P_3 = x^3 - x^2 + x$ .Soit  $G = \{P \in E / P(1) = 0\}$ .Déterminer une base et la dimension de  $F$ ,  $G$ ,  $F + G$ ,  $F \cap G$ .

- La famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est liée car :

$$P_3 = x^3 - x^2 + x = (x^3 + x^2 + 1) - (2x^2 - x + 1) = P_2 - P_1$$

Ainsi,  $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$  et  $(P_1, P_2)$  libre puisque polynômes non nuls de degrés distincts, donc  $(P_1, P_2)$  est une base de  $F$  :  $\dim(F) = 2$ .

- $G = \{(x-1)(ax^2 + bx + c), a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^2(x-1), x(x-1), x-1)$ . La famille génératrice proposée est nécessairement libre, les polynômes étant tous non nuls de degrés différents.

Ainsi,  $(x^2(x-1), x(x-1), x-1)$  est une base de  $G$  et  $\dim(G) = 3$ .

- On sait que  $G \subset F + G \subset E$ , donc  $3 \leq \dim(F + G) \leq 4$ .

Si  $\dim(F + G) = 3$ , on aurait  $F + G = G$ , donc  $F \subset G$ . Or, le polynôme  $P_1 = 2x^2 - x + 1 \in F$ , mais  $P_1(1) \neq 0$ , donc  $P_1 \notin G$ .

On a donc nécessairement  $\dim(F + G) = 4$  et donc  $F + G = \mathbb{R}_3[x]$ .

- Par la formule de Grassmann, on sait déjà que  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ , donc  $\dim(F \cap G) = 1$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ . Alors :

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\iff \begin{cases} P = a(2x^2 - x + 1) + b(x^3 + x^2 + 1), a, b \in \mathbb{R} \\ \text{et } P(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P = a(2x^2 - x + 1) + b(x^3 + x^2 + 1), a, b \in \mathbb{R} \\ \text{et } 2a + 3b = 0 \end{cases} \\ &\iff P = a(2x^2 - x + 1) - \frac{2}{3}a(x^3 + x^2 + 1), a \in \mathbb{R} \\ &\iff P = a \left( -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} \right), a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement :

$$F \cap G = \text{Vect} \left( -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} \right) = \text{Vect} \left( 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \right)$$

8

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau, leur image, leur rang et leur matrice canonique associée.

1.  $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x], P \mapsto P'$
2.  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], P \mapsto P'$
3.  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(0), P(1), P'(1))$ .
4.  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], P \mapsto \left( x \mapsto P(x) + (x-2) \cdot P'(x) \right)$

1. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_4[x]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi,  $f$  est bien linéaire.

$P \in \text{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff P' = 0 \iff P$  constant. Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$$

De plus, puisque  $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$  est la base de  $\mathbb{R}_4[x]$ , on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4)) = \text{Vect}(0, 1, 2x, 3x^2, 4x^3) = \text{Vect}(1, x, x^2, x^3) = \mathbb{R}_3[x]$$

La matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_4[x]$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.  $f$  est exactement la restriction de celle de la question 1 à  $\mathbb{R}_2[x]$ , donc  $f$  est encore linéaire. On a encore  $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$  et  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2)) = \text{Vect}(0, 1, 2x) = \text{Vect}(1, x) = \mathbb{R}_1[x]$ .

La matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[x]$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_3[x]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$f(\lambda P + Q) = \left( (\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)(1), (\lambda P + Q)'(1) \right) = \lambda \left( P(0), P(1), P'(1) \right) + \left( Q(0), Q(1), Q'(1) \right) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi,  $f$  est bien linéaire.

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ . Alors :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \iff P = ax(x-1)^2, a \in \mathbb{R}$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left( x(x-1)^2 \right)$$

Par théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ , et donc on a  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ . L'application  $f$  est surjective.

Prenons la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$ .



- $f(1) = (1, 1, 0)$
- $f(x) = (0, 1, 1)$
- $f(x^2) = (0, 1, 2)$
- $f(x^3) = (0, 1, 3)$ .

La matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}_3[x]$  et  $\mathbb{R}^3$  est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_3[x]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + (x-2)(\lambda P + Q)' = \lambda \left( P + (x-2)P' \right) + \left( Q + (x-2)Q' \right) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc  $f$  est bien linéaire.

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ . On a :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff P + (x-2)P' = 0 \iff \left( (x-2)P \right)' = 0 \iff (x-2)P \text{ constant} \iff P = 0$$

Ainsi,  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , l'application  $f$  est injective.

Par théorème du rang, on en déduit que  $\dim(\text{Im}(f)) = 4$ , donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_3[x]$ .

Prenons la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

- $f(1) = 1$
- $f(x) = x + (x-2) = 2x - 2$
- $f(x^2) = x^2 + (x-2)2x = 3x^2 - 4x$
- $f(x^3) = x^3 + (x-2)3x^2 = 4x^3 - 6x^2$ .

La matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$  est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9

Soit  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ .

1. Soit  $u = (1, 2, -1)$ . Montrer que  $(u)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ .
2. Soient  $v = (1, 0, -1)$  et  $w = (1, -1, 0)$ . Calculer  $f(v)$  et  $f(w)$ .
3. Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donner  $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$
4. Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$ .

1. On a :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien le vecteur  $u$  qui appartient à  $\text{Ker}(f)$ , ce qui prouve déjà que  $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$ .

Comme  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -2, 1), (-1, 0, 1), (-1, -2, 3))$  et que les deux premiers vecteurs forment une famille libre (ils ne sont pas colinéaires), on a  $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$  et alors d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(f)) \leq 1$ .

Finalement, on a exactement  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$  et ainsi  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$ .

2. On a :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc  $f(v) = v$ .

De même,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc également  $f(w) = w$ .

3. Pour vérifier que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , il suffit de vérifier que  $(u, v, w)$  est libre (elle est de cardinal 3). On a :

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Ainsi famille  $\mathcal{B}'$  est libre, et est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ , et dans cette base :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On a montré que  $v = f(v)$  et  $w = f(w)$ , ce qui prouve que  $v \in \text{Im}(f)$  et  $w \in \text{Im}(f)$ . La famille  $(v, w)$  étant libre (car extraite d'une base), et  $\text{Im}(f)$  étant de dimension 2 (car le rang est égal à 2), on a donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(v, w)$$

Puisque  $v - f(v) = 0$ , et  $w - f(w) = 0$ , on a bien que  $v \in \text{Ker}(Id - f)$  et  $w \in \text{Ker}(Id - f)$ , et ainsi par stabilité par combinaison linéaire :  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v, w) \subset \text{Ker}(Id - f)$ .

De plus, soit  $x \in \text{Ker}(Id - f)$ . On a alors  $(Id - f)(x) = 0$ , soit  $x = f(x) \in \text{Im}(f)$ , ce qui prouve que  $\text{Ker}(Id - f) \subset \text{Im}(f)$ .

Par double inclusion, on a finalement que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$ .

10

On pose pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ ,  $f(P) = P(x+1)$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$  et déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

1. Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_3[x]$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(x+1) = \lambda P(x+1) + Q(x+1) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi,  $f$  est bien une application linéaire.

De plus, si  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ , alors  $P(x+1)$  est encore un polynôme de  $\mathbb{R}_3[x]$ , donc  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

Écrivons la matrice de  $f$  dans la base canonique.

- $f(1) = 1$
- $f(x) = x + 1$
- $f(x^2) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $f(x^3) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

La matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que c'est en fait le début du triangle de Pascal.

2. La matrice  $A$  est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc est bien inversible.

Remarquons que cela traduit également le fait que  $f$  est un isomorphisme.

Pour déterminer  $A^{-1}$ , on peut plutôt regarder l'application  $f^{-1}$ . Ici,  $f^{-1}$  est évident, c'est :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ Q & \longmapsto & Q(x-1) \end{array}$$

- $f^{-1}(1) = 1$
- $f^{-1}(x) = x - 1$
- $f^{-1}(x^2) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
- $f^{-1}(x^3) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

et donc  $A^{-1}$  étant la matrice de  $f^{-1}$  dans la base canonique, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une de ses bases. On définit l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^4$  par  $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(e_i) = e_{i+1}$  et  $\varphi(e_4) = e_1$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme et donner  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ .
2. Déterminer  $\varphi^{-1}$  et en déduire la valeur de  $A^{-1}$ .

1. On a  $\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) = (e_2, e_3, e_4, e_1)$ .  
 $\varphi$  envoyant une base de  $\mathbb{R}^4$  sur une base de  $\mathbb{R}^4$ , c'est bien un automorphisme, et sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a directement :

$$\varphi^{-1}(e_1) = e_4, \quad \varphi^{-1}(e_2) = e_1, \quad \varphi^{-1}(e_3) = e_2, \quad \varphi^{-1}(e_4) = e_3$$

et la matrice de l'application  $\varphi^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$  (qui est alors la matrice  $A^{-1}$ ) est finalement :

$$A^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12

Soit  $E$  de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $\text{Ker}(f^2)$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$
2. Montrer que  $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$  et que  $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f)$ .
3. Montrer que  $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$ .

1. Par définition, on a :

$$g : \begin{array}{ccc} \text{Ker}(f^2) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Soit  $u \in \text{Im}(g)$ .

Alors il existe  $x \in \text{Ker}(f^2)$  tel que  $u = g(x)$ .

Or,  $u = g(x) = f(x)$ , donc  $u \in \text{Im}(f)$ .

De plus,  $f(u) = f(g(x)) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$  (puisque  $x \in \text{Ker}(f^2)$ ) donc  $u \in \text{Ker}(f)$ .

Finalement :

$$\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$$

2. Si  $x \in \text{Ker}(g)$ , on a  $g(x) = 0$ , et donc  $f(x) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(f)$ .

Réciproquement, si  $x \in \text{Ker}(f)$ , alors  $x \in \text{Ker}(f^2)$  (car  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ ), donc  $g(x)$  a un sens, et alors  $g(x) = f(x) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(g)$ .

Par double inclusion, on a donc montré que :

$$\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$$

De plus, d'après la question 1, on a montré que :

$$\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$$

donc  $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f)$ .

3. D'après le théorème du rang pour l'application  $g$ , on a :

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(g)$$

Or, on a  $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ , donc  $\text{rg}(g) \leq \dim(\text{Ker}(f))$ . On a donc :

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = 2 \dim(\text{Ker}(f))$$

13

Soit  $A$  la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa diagonale, sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Préciser son rang et une base  $\mathcal{B}$  de  $\text{Im}(A)$ .
2. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associ   à  $A$ , et soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im}(f)$ . Vérifier que  $g$  est un endomorphisme de  $\text{Im}(f)$ . Préciser sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . L'endomorphisme  $g$  est-il bijectif ?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $C_1 = C_4$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

On a  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = 3$  puisque les trois premières colonnes forment une famille libre (on a  $(C_2, C_3)$  est clairement libre et  $C_1 \notin \text{Vect}(C_2, C_3)$ ). Ainsi, une base  $\mathcal{B}$  de  $\text{Im}(A)$  est :

$$(u, v, w) \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque  $g$  est la restriction d'une application linéaire,  $g$  est bien linéaire. Et puisque  $\forall x \in \text{Im}(f)$ ,  $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$ ,  $g$  est bien un endomorphisme de  $\text{Im}(f)$ .

$$\text{Ici, } g(u) = f(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u + v + w, g(v) = f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v \text{ et } g(w) = f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w.$$

Ainsi, la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  est triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc  $M$  est inversible, donc  $g$  est bijectif.

14

Soit  $A$  la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, sur sa dernière ligne et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice  $A$  est-elle inversible? Préciser son rang et une base  $\mathcal{B}$  de  $\text{Im}(A)$ .
2. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à  $A$ , et soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im}(f)$ . Vérifier que  $g$  est un endomorphisme de  $\text{Im}(f)$ . Préciser sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . L'endomorphisme  $g$  est-il bijectif?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $C_1 = C_4$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

On a  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2) = 2$  puisque  $C_2 = C_3$  et  $C_1 = C_4$ . De plus,  $(C_1, C_2)$  libre car  $C_1, C_2$  non colinéaires. Ainsi, une base  $\mathcal{B}$  de  $\text{Im}(A)$  est :

$$(u, v) \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Puisque  $g$  est la restriction d'une application linéaire,  $g$  est bien linéaire. Et puisque  $\forall x \in \text{Im}(f)$ ,  $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$ ,  $g$  est bien un endomorphisme de  $\text{Im}(f)$ .

$$\text{Ici, } g(u) = f(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2u + 2v \text{ et } g(v) = f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u.$$

Ainsi, la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  est de rang 2 (les colonnes sont non proportionnelles) donc  $M$  est inversible, donc  $g$  est bijectif.