

Corrigé du devoir maison n°2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On propose de calculer la somme double  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i}$ .

1. Montrer que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$ .

► D'après la définition des coefficients binomiaux, on a  $\binom{j}{i} = 0$  dès que  $j < i$ . Donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} 0 = \boxed{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}}$$

2. Pour cette question, on fixe  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Montrer que  $\sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$  (indication : on pourra raisonner par récurrence).

► On va démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ . Si  $n = 0$  alors  $i \in \{0\}$  c'est-à-dire  $i = 0$ ,  $\sum_{j=0}^0 \binom{j}{0} = \sum_{j=0}^0 \binom{j}{0} = \binom{0}{0} = 1$  et  $\binom{n+1}{i+1} = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1$ . Donc l'égalité est vraie pour  $n = 0$ . On suppose maintenant l'égalité vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  et on veut la démontrer au rang  $n + 1$ . Soit  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1\}$ . On distingue deux cas :  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  ou  $i = n + 1$ . Dans le deuxième cas,  $\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=n+1}^{n+1} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{n+1} = 1$  et  $\binom{(n+1)+1}{i+1} = \binom{n+2}{(n+1)+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$  donc l'égalité est vraie au rang  $n + 1$ . Dans le premier cas, on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{i+1} + \binom{n+1}{i} = \binom{n+2}{i+1} = \binom{(n+1)+1}{i+1}$$

d'après la formule de Pascal. Donc l'égalité est vraie au rang  $n + 1$  lorsqu'elle est vraie au rang  $n$ , et cette implication est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On conclut d'après le principe de récurrence.

3. Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i}$  de deux manières différentes.

► En utilisant les deux questions précédentes, on obtient en sommant sur les lignes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i}$$

Or  $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = (1 + 1)^{n+1} = 2^{n+1}$  d'après la formule du binôme de Newton. Donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} = 2^{n+1} - 1 - (n + 1) = \boxed{2^{n+1} - n - 2}$$

De même, on obtient en utilisant la question 1 et sommant sur les colonnes :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} - \binom{j}{0} \right) = \sum_{j=1}^n (2^j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n 2^j - \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{j=0}^n 2^j - 2^0 - n \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 - n = 2^{n+1} - 1 - 1 - n = \boxed{2^{n+1} - n - 2} \end{aligned}$$

Remarque : dans cette question aussi, on peut raisonner par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .