

1 Montrer que $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Il faut montrer que :

- F est dérivable sur \mathbb{R}
- $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

Déjà, montrons que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$F(x) \text{ existe} \iff \sqrt{1 + x^2} > -x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } 1 + x^2 > x^2 \end{cases} : \text{ tjs vrai}$$

F est donc bien définie sur \mathbb{R} . De plus, par composition, F est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

F est donc bien une primitive de f sur \mathbb{R} .

2 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3.

La primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$ sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3 est exactement la fonction g définie par :

$$\forall x > 1, g(x) = \int_3^x \frac{1}{2(t-1)} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t-1) \right]_3^x = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{2} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{x-1}{2}} \right)$$

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-2}^4 (x^3 + x - 2)dx$$

$$2. \int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx$$

$$3. \int_2^4 \ln(2t)dt$$

$$4. \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}}dt$$

$$6. \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}dt$$

$$7. \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$$

$$8. \int_{-1/3}^0 2^{3x+1}dx$$

$$9. \int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt \text{ pour } \alpha > 0.$$

$$10. \int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1|dx$$

$$11. \int_0^5 t|t^2 - 1|dt$$

$$12. \int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1}dt$$

$$13. \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$14. \int_1^e \ln(t)dt$$

$$15. \int_0^1 \text{Arctan}(t)dt.$$

$$16. \int_0^1 x \text{Arctan}(x)dx.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx.$$

$$18. \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x)dx.$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx.$$

1.

$$\int_{-2}^4 (x^3 + x - 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^4 = (64 + 8 - 8) - (4 + 2 + 4) = \boxed{54}$$

2.

$$\int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx = \frac{1}{2} \int_3^{11} 2(2x+3)^{1/2}dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3/2} (2x+3)^{3/2} \right]_3^{11} = \frac{1}{3} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{1}{3} (125 - 27) = \boxed{\frac{98}{3}}$$

ou avec un changement de variable $t = 2x + 3$ ($dt = 2dx$),

$$\int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx = \frac{1}{2} \int_3^{11} \sqrt{2x+3} (2dx) = \frac{1}{2} \int_9^{25} (\sqrt{t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3/2} t^{3/2} \right]_9^{25} = \frac{1}{3} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \boxed{\frac{98}{3}}$$

3.

$$\int_2^4 \ln(2t)dt = \int_2^4 (\ln 2 + \ln t)dt = \left[\ln(2)t + t \ln(t) - t \right]_2^4 = 4 \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 2 = \boxed{8 \ln(2) - 2}$$

ou avec un changement de variable $x = 2t$ ($dx = 2dt$),

$$\int_2^4 \ln(2t)dt = \int_4^8 \ln(x) \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \left[x \ln(x) - x \right]_4^8 = \frac{1}{2} (8 \ln(8) - 8 - 4 \ln(4) + 4) = \boxed{8 \ln(2) - 2}$$

4.

$$\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \left[\ln(|x^2-x+1|) \right]_0^2 = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3)}$$

ou avec un changement de variable $t = x^2 - x + 1$, on a $dt = (2x - 1)dx$, donc :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1} (2x-1)dx = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \left[\ln(|t|) \right]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3)}$$

5. Sans calcul :

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} dt = \boxed{0} \quad \text{puisque la fonction } t \mapsto \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} \text{ est impaire sur } [-1, 1]!$$

ou avec calcul :

$$\int_{-1}^1 t (t^2+2)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} (t^2+2)^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} (3^{2/3} - 3^{2/3}) = 0$$

6.

$$\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5} \left[\sqrt{t^5+3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}(2-\sqrt{3})}$$

7.

$$\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) e^{\sqrt{t}} dt = 2 \left[e^{\sqrt{t}} \right]_1^2 = \boxed{2(e^{\sqrt{2}} - e)}$$

8.

$$\int_{-1/3}^0 2^{3x+1} dx = 2 \int_{-1/3}^0 8^x dx = 2 \int_{-1/3}^0 e^{x \ln(8)} dx = 2 \left[\frac{1}{\ln(8)} e^{x \ln(8)} \right]_{-1/3}^0 = \frac{2}{\ln(8)} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{\ln(8)}}.$$

9. Pour $\alpha > 0$,

$$\int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt = \left[\frac{1}{\alpha+1} (\ln t)^{\alpha+1} \right]_1^e = \boxed{\frac{1}{\alpha+1}}$$

10. Cherchons le signe de $x^3 - x^2 + x - 1$ sur $[0, 2]$ pour enlever la valeur absolue.

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

Le signe étant le même que celui de $x-1$, on en déduit que, sur $[1, 2]$ $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$ et sur $[0, 1]$, on a $x^3 - x^2 + x - 1 \leq 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1| dx &= \int_0^1 (-x^3 + x^2 - x + 1) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2 + x - 1) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \int_0^5 t|t^2-1| dt &= \int_0^1 t(1-t^2) dt + \int_1^5 t(t^2-1) dt = \int_0^1 (t-t^3) dt + \int_1^5 (t^3-t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right]_1^5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5^4}{4} - \frac{25}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{625}{4} - \frac{25}{2} = \boxed{\frac{577}{4}} \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1} dt &= \int_0^2 \frac{t-1}{(-t^2+2t)+1} dt + \int_2^5 \frac{t-1}{(t^2-2t)+1} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(-t^2+2t+1) \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2} \ln(t^2-2t+1) \right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2} \ln(16) = \boxed{2 \ln(2)} \end{aligned}$$

13.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\operatorname{Arctan}(t) \right]_0^1 = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

14.

$$\int_1^e \ln(t) dt = \left[t \ln(t) - t \right]_1^e = (e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1) = \boxed{1}$$

On peut aussi faire une intégration par parties, en remarquant qu'on a $\int_1^e 1 \times \ln(t) dt$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right|$, u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$ et on a :

$$\int_1^e 1 \times \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = e - \int_1^e 1 dt = e - (e - 1) = \boxed{1}$$

$$15. \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt = \int_0^1 1 \times \operatorname{Arctan}(t) dt.$$

On fait une intégration par parties en posant $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \operatorname{Arctan}(t) \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right|$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\int_0^1 1 \times \operatorname{Arctan}(t) dt = \left[t \operatorname{Arctan}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \operatorname{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)}$$

$$16. \int_0^1 x \operatorname{Arctan}(x) dx ?$$

On fait une intégration par parties en posant $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x \\ v(x) = \operatorname{Arctan}(x) \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right|$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \times \operatorname{Arctan}(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1) - 1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[x - \operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

17. On fait deux intégrations par parties successives dans $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(2x) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi/2]$ et on a :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx$$

En posant à nouveau : $\left| \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(2x) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi/2]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx &= \frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (\cos(\pi) - \cos(0)) = \boxed{\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

18. On fait deux intégrations par parties successives dans $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 - x + 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x - 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx = \left[(x^2 - x + 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x - 1)e^x dx = (e - 1) - \int_0^1 (2x - 1)e^x dx$$

En posant à nouveau : $\left| \begin{array}{l} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx &= (e - 1) - \left(\left[(2x - 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right) \\ &= (e - 1) - \left(e - (-1) - \left[2e^x \right]_0^1 \right) = -2 + (2e - 2) = \boxed{2e - 4} \end{aligned}$$

19. En reconnaissant directement une forme $-u'u^3$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos^4(x) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} \cos^4(\pi/2) + \frac{1}{4} \cos^4(0) = \frac{1}{4}$$

20. On linéarise $\sin^2(x)$.

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{2 \cos(2x) - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

4 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt$ et $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 \, dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons I_n par intégration par parties.

On pose :

$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e t^n dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons J_n par intégration par parties.

On pose :

$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = (\ln(t))^2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \frac{2 \ln(t)}{t} \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} (\ln(t))^2 \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{2 \ln(t)}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_n \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

5 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$3. \int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

$$2. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt$$

$$6. \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt$$

1.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt &= \int_2^3 \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \int_2^3 \left(\frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(|1-t|) + \frac{1}{2} \ln(|1+t|) \right]_2^3 = -\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(3) = \boxed{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

2.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[\ln(|t-1|) - \ln(|t|) \right]_{-2}^{-1} = \ln(2) - \ln(1) - \ln(3) + \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

3.

$$\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \right) dt = \left[\ln(|t|) + 2 \ln(|t+1|) \right]_1^2 = \ln(2) + 2 \ln(3) - \ln(1) - 2 \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt &= \int_0^1 \left(\frac{1/5}{t-2} - \frac{1/5}{t+3} \right) dt = \left[\frac{1}{5} \ln(|t-2|) - \frac{1}{5} \ln(|t+3|) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \ln(1) - \frac{1}{5} \ln(4) - \frac{1}{5} \ln(2) + \frac{1}{5} \ln(3) = \boxed{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{3}{8}\right)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt &= \int_1^2 \left(\frac{1/2}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1/2}{t+2} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(|t|) - \ln(|t+1|) + \frac{1}{2} \ln(|t+2|) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3) = \boxed{\frac{5}{2} \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt &= \int_{-1}^0 \left(\frac{(t^2+4t-5) - 4t+5}{t^2+4t-5} \right) dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{4t-5}{(t-1)(t+5)} \right) dt = \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{-1/6}{t-1} - \frac{25/6}{t+5} \right) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{6} \ln(|t-1|) - \frac{25}{6} \ln(|t+5|) \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{25}{6} \ln(5) + 1 - \frac{1}{6} \ln(2) + \frac{25}{6} \ln(4) = \boxed{1 + \frac{49}{6} \ln(2) - \frac{25}{6} \ln(5)} \end{aligned}$$

6 Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

$$1. \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1})$$

$$2. \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = t + 1)$$

$$3. \int_1^{4/3} \frac{t^2}{(3t-2)^5} dt \quad (u = 3t - 2)$$

$$4. \int_1^2 \frac{e^{2t}}{1 - e^t} dt \quad (t = \ln(x))$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{t} + 1} dt \quad (x = \sqrt{t})$$

$$6. \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$7. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \quad (u = \cos(t))$$

$$8. \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \quad (x = \sin(t))$$

$$9. \int_1^2 \frac{1}{t(t^3 + 1)} dt \quad (u = t^3)$$

$$10. \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$11. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx \quad (u = \sin(x))$$

$$12. \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx \quad (x = \sqrt{t})$$

1. On souhaite faire le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Notons pour tout $x \in [\ln(2), \ln(4)]$, $\varphi(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[\ln(2), \ln(4)]$ et $\forall x \in [\ln(2), \ln(4)]$, $\varphi'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

On a donc :

$$u = \sqrt{e^x - 1} \quad \text{avec} \quad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx$$

et remarquons que : $u = \sqrt{e^x - 1} \iff e^x - 1 = u^2 \iff e^x = u^2 + 1$

On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2(\sqrt{e^x - 1})^2}{e^x} \times \left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \right) \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2\varphi^2(x)}{\varphi^2(x) + 1} \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(\ln 2)}^{\varphi(\ln 4)} \frac{2u^2}{u^2 + 1} du \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du \\ &= 2 \left[u - \text{Arctan}(u) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left(\sqrt{3} - \text{Arctan}(\sqrt{3}) \right) - 2(1 - \text{Arctan}(1)) \\ &= \boxed{2\sqrt{3} - 2\frac{\pi}{3} - 2 + 2\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable $x = t + 1$ ($dx = dt$), on a donc :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - 2\sqrt{x} \right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) - 2(\sqrt{2} - 1)$$

3. On fait le changement de variable $u = 3t - 2$ ($du = 3dt$).

$$\begin{aligned} \int_1^{4/3} \frac{t^2}{(3t-2)^5} dt &= \int_1^2 \frac{\left(\frac{u+2}{3}\right)^2}{u^5} \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{27} \int_1^2 \left(\frac{u^2 + 4u + 4}{u^5}\right) du = \frac{1}{27} \int_1^2 \left(\frac{1}{u^3} + \frac{4}{u^4} + \frac{4}{u^5}\right) du \\ &= \frac{1}{27} \left[-\frac{1}{2u^2} - \frac{4}{3u^3} - \frac{1}{u^4} \right]_1^2 = \frac{1}{27} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{1}{27} \frac{119}{48} \end{aligned}$$

4. Remarquons que cette fois, le changement de variable est donné en sens inverse. On veut poser $t = \ln(x)$ avec $dt = \frac{1}{x} dx$.

Remarquons que $t = 1 \Leftrightarrow x = e$ et $t = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{e^{2t}}{1 - e^t} dt &= \int_e^{e^2} \frac{e^{2 \ln x}}{1 - e^{\ln x}} \left(\frac{1}{x} dx\right) = \int_e^{e^2} \frac{x^2}{x(1-x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{x}{1-x} dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) dx \\ &= \left[-\ln(|1-x|) - x \right]_e^{e^2} = -\ln(e^2 - 1) - e^2 + \ln(e - 1) + e = e - e^2 - \ln(e + 1) \end{aligned}$$

5. On veut calculer $\int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{t} + 1} dt$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

Mais il y a un problème : la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas de classe C^1 sur $[0, 1]$... On ne peut pas faire apparaître $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, lorsque $t \in [0, 1]$.

Il suffit d'écrire le changement de variable à l'inverse et d'écrire $t = x^2$ (et $dt = 2x dx$), puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est, elle, de classe C^1 sur $[0, 1]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{t} + 1} dt &= \int_0^1 \frac{x - x^2}{x + 1} (2x dx) = 2 \int_0^1 \frac{x^2 - x^3}{x + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{(x + 1)(-x^2 + 2x - 2) + 2}{x + 1} dx \\ &= 2 \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 2 \ln(x + 1) \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{4}{3} + 2 \ln(2) \right) \end{aligned}$$

6. On pose $t = x^2$ ($dt = 2x dx$), on a alors :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 e^x (2x dx) = 2 \int_0^1 x e^x dx = 2 \left[(x - 1)e^x \right]_0^1 = \boxed{2}$$

7. On pose $u = \cos(t)$, donc $du = (-\sin(t)) dt$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-1}{\sin^2(t)} (-\sin(t) dt) \\ &= - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos^2(t)} (-\sin(t) dt) \\ &= - \int_{\sqrt{2}/2}^0 \frac{1}{1 - u^2} du \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[-\ln(1-u) + \ln(1+u) \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

8. On pose $x = \sin(t)$, donc $dx = (\cos(t))dt$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(t)} (\cos(t)dt) \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{(1 - \sin^2(t))} \cos(t)dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\ln(1 - x) + \ln(1 + x) \right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

9. On pose $u = t^3$, donc $du = 3t^2 dt$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t(t^3 + 1)} dt &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^3(t^3 + 1)} (3t^2 dt) \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{1}{u(u + 1)} du \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln(u) - \ln(u + 1) \right]_1^8 \\ &= \frac{1}{3} (\ln(8) - \ln(9) + \ln(2)) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{16}{9} \right) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

10. On veut poser $t = x^2$, donc $dt = 2x dx$.

Remarquons que :

$$t = 1 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad t = 3 \iff x = \sqrt{3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x^2}} 2x dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} 4 \ln(x) dx \\ &= 4 \left[x \ln(x) - x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \ln(3) - 4\sqrt{3} + 4 \end{aligned}$$

11. On veut calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} dx$ avec le changement de variable $u = \sin(x)$.

Remarquons que $u = \sin(x)$ donne $du = \cos(x)dx$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)\sin(x)} dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{(1-\sin^2(x))\sin(x)} \cos(x)dx \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u^2)u} du \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1/2}{1-u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{1}{u} \right) du \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(1-u) - \frac{1}{2} \ln(1+u) + \ln(u) \right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[\ln \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln(3) \end{aligned}$$

12. Calculons $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$

On pose $x = \sqrt{t}$ donc $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. On a donc :

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx = \int_{\pi}^{4\pi} 2\sqrt{t} \cos(t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} dt \right) = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(\pi) = 0$$

7 On note pour $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Calculer $I(0, q)$ et $I(p, 0)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, exprimer $I(p+1, q)$ en fonction de $I(p, q+1)$.
3. Calculer $I(p, q)$ en fonction de p et q .

1.

$$I(0, q) = \int_0^1 (1-t)^q dt = \left[-\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$$

et

$$I(p, 0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a : $I(p+1, q) = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt$.

En posant $\begin{cases} u(t) = t^{p+1} \\ v'(t) = (1-t)^q \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = (p+1)t^p \\ v(t) = \frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \end{cases}$, on a :

$$I(p+1, q) = \left[-\frac{t^{p+1}(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1} dt = 0 + \frac{p+1}{q+1} I(p, q+1)$$

3. On a donc, en itérant plusieurs fois la relation précédente, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1) \\ &= \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} I(p-2, q+2) \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} I(p-3, q+3) \\ &= \vdots \\ &= \frac{p(p-1)(p-2) \cdots 1}{(q+1)(q+2)(q+3) \cdots (q+p)} I(0, q+p) \\ &= \frac{p!}{(q+1)(q+2) \cdots (q+p)} \times \frac{1}{(q+p+1)} \\ &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \end{aligned}$$

8 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. La suite (I_n) est-elle monotone?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \left(\frac{1-x}{n+1} - 1 \right) dx$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{(1-x)^n}{n!} e^x \left(\frac{1-x}{n+1} - 1 \right) \leq 0$, donc par positivité de l'intégrale ($0 < 1$), on a :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

La suite (I_n) est donc décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e$$

Donc par positivité de l'intégrale, ($0 < 1$),

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{e}{n!} \int_0^1 t^n dt = \frac{e}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}$$

3. On a $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

Notons pour tout $x \in [0, 1]$, $\left| \begin{array}{l} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = \frac{e^x}{n!} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} u(x) = -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{e^x}{n!} \end{array} \right|$.

Les fonctions u et v sont bien \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ donc on a par IPP :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \frac{e^x}{n!} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

4. On a donc :

$$\forall k \geq 0, I_k - I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

En sommant cette relation pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

autrement dit (somme télescopique)

$$I_0 - I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \implies I_n = I_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 e^x dx - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \boxed{e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}$$

9 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur $[1, e]$, $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$. En déduire un encadrement de I_n .
3. Montrer que : $\forall n \geq 0$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx = \int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx$$

Or, $\forall x \in [1, e]$, $x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) \leq 0$, donc par positivité ($1 < e$), $\int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx \leq 0$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est donc décroissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, e]$, $x^2 (\ln x)^n \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$. La suite (I_n) est donc minorée (par 0).

2. Puisque \ln est croissante, on a $\forall x \in [1, e]$, $\ln(x) \geq \ln(1) = 0$.

Posons pour tout $x \in [1, e]$, $\varphi(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$.

La fonction φ est dérivable sur $[1, e]$ et on a : $\forall x \in [1, e]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0$.

La fonction φ est donc croissante, et comme $\varphi(e) = 0$, on a $\forall x \in [1, e]$, $\varphi(x) \leq 0$. Finalement :

$$\forall x \in [1, e], 0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$$

D'où :

$$\forall x \in [1, e], 0 \leq x^2 (\ln x)^n \leq x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n$$

Par positivité ($1 < e$), on en déduit que : $0 \leq \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \leq \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} dx$,

autrement dit :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+3} - 1}{(n+3)e^n} \leq \frac{e^{n+3}}{(n+3)e^n} = \frac{e^3}{n+3}$$

D'où :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3}}$$

3. Soit $n \geq 0$. On a $I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx$.

Notons pour tout $x \in [1, e]$, $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x^2 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \end{array} \right|$. Les fonctions u et v sont bien \mathcal{C}^1 sur $[1, e]$ donc on peut intégrer par parties :

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

10 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

- Calculer I_0 et I_1 .
- Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.
En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geq 1$.

1.

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2} dx = \left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (x-1+1) \sqrt{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x} dx - \int_0^1 (1-x)^{3/2} dx \\ &= I_0 - \left[-\frac{(1-x)^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = I_0 - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} (1 - (1-x)) \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx \\ &= I_{n-1} - \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx \end{aligned}$$

On fait une IPP dans l'intégrale obtenue.

Posons $\forall x \in [0, 1]$, $u'(x) = x^{n-1}$, $v(x) = (1-x)^{3/2}$, $u(x) = \frac{1}{n} x^n$ et $v'(x) = -\frac{3}{2} \sqrt{1-x}$. On a alors :

$$I_n = I_{n-1} - \left[\frac{1}{n} x^n (1-x)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{3}{2n} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

D'où :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{3}{2n} I_n \implies \left(1 + \frac{3}{2n} \right) I_n = I_{n-1} \implies \boxed{I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} I_0 \\ I_2 &= \frac{4}{7} I_1 = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} I_0 \\ I_3 &= \frac{6}{9} I_2 = \frac{6 \times 4 \times 2}{9 \times 7 \times 5} I_0 \end{aligned}$$

par une récurrence immédiate :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \times 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1) \cdots 7 \times 5} I_0 \\ &= \frac{(2n+2)(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2 \cdots 4^2 \times 2^2}{(2n+3)!} \times 2 \\ &= \boxed{(4n+4) \frac{(2^n n!)^2}{(2n+3)!}} \end{aligned}$$

11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} . En déduire la valeur de I_n .

2. Calculer alors $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = I_n - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

$$\text{On pose } \forall t \in [0, 1], \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = t(1-t^2)^n \end{cases}, \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$

$$I_{n+1} = I_n - \left[\frac{1}{2(n+1)} t(1-t^2)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)} (1-t^2)^{n+1} dt = I_n + \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$$

On a donc finalement :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2n+2} I_{n+1} \implies \boxed{I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n}$$

On a alors en utilisant la relation de récurrence :

$$I_1 = \frac{2}{3} I_0, \quad \text{puis} \quad I_2 = \frac{4}{5} I_1 = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} I_0$$

puis par une récurrence immédiate, on a :

$$I_n = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3} I_0$$

Puisque $I_0 = \int_0^1 1 dt = 1$, on donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3} \\ &= \frac{((2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times (2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt = I_n \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{S_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln(2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire un encadrement de u_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$$

D'où par positivité de l'intégrale ($0 < 1$)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$$

autrement dit :

$$u_n \leq \ln(2)$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

3. On en déduit donc que :

$$\ln(2) - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \ln(2)$$

13 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$.
5. Etudier la parité de la fonction F .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant continue sur \mathbb{R} (par composition), elle l'est également sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$). Donc l'intégrale $\int_0^x e^{\cos(t)} dt$ est bien définie et $F(x)$ existe : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant continue sur \mathbb{R} , elle admet une primitive g sur \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = \left[g(t) \right]_0^x = g(x) - g(0)$$

Ainsi, par somme d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 et d'une fonction constante, F est bien dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = g'(x) = e^{\cos(x)}$$

(on pouvait également reconnaître directement pour F l'unique primitive de $t \mapsto e^{\cos(t)}$ qui s'annule en 0).

2. Soit $x > 0$. Alors, la fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant strictement positive et continue sur l'intervalle $[0, x]$, par positivité de l'intégrale, les bornes sont dans le bon ordre, on obtient $\int_0^x e^{\cos(t)} dt > 0$.

Soit $x \leq 0$. Alors : $F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = -\int_x^0 e^{\cos(t)} dt$. La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant positive sur l'intervalle $[x, 0]$, par positivité de l'intégrale, on obtient $\int_x^0 e^{\cos(t)} dt \geq 0$ et donc $F(x) \leq 0$.

On a donc montré que : $\boxed{F(x) \leq 0 \iff x \leq 0}$.

3. La fonction F est dérivable d'après la question 1 et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{\cos(x)} > 0$, donc la fonction F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Si $x \geq 0$, $\left| \int_0^x e^{\cos(t)} dt \right| \leq \int_0^x e^{\cos(t)} dt \leq \int_0^x e^1 dt = xe$.

Si $x \leq 0$, $\left| \int_0^x e^{\cos(t)} dt \right| = \int_x^0 e^{\cos(t)} dt \leq \int_x^0 e^1 dt = -xe$.

Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant un changement de variable $u = -t$ on obtient :

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{\cos t} dt = \int_0^x e^{\cos(-u)} (-du) = -\int_0^x e^{\cos(u)} du = -F(x)$$

La fonction F est donc impaire.

14 Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

- le domaine de définition de f
- le signe de f sur le domaine de définition,
- la parité eventuelle
- la dérivée de f si elle existe

$$1. f : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

$$4. f : x \mapsto \int_1^x |t|^3 dt$$

$$7. f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1 - t^4}$$

$$2. f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$5. f : x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

$$8. f : x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$3. f : x \mapsto \int_0^x |t| dt$$

$$6. f : x \mapsto \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

$$9. f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

1.

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - e^{-t}}$ est définition et continue sur \mathbb{R}^* . Ainsi, quelque soit la valeur de x , la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - e^{-t}}$ ne sera jamais continue sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), donc l'intégrale $\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$ n'est pas bien définition.

Ainsi f n'est pas définition.

2.

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$ est bien définition, donc f est définition sur \mathbb{R} .

Pour $x \geq 0$,

$$\forall t \in [0, x], \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \geq 0$$

donc par positivité ($0 \leq x$),

$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geq 0$$

Ainsi, f est positive sur \mathbb{R}^+ .

Pour $x \leq 0$,

$$\forall t \in [x, 0], \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \leq 0$$

donc par positivité ($x \leq 0$) (bornes dans le mauvais sens),

$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geq 0$$

Ainsi, f est positive aussi sur \mathbb{R}^- .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x \frac{e^{-u} - e^u}{e^{-u} + e^u} (-du) = \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du = f(x)$$

ainsi, f est paire.

Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ qui s'annule en 0, donc f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

3.

$$f(x) = \int_0^x |t| dt$$

La fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur \mathbb{R} , ainsi, pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^x |t| dt$ existe bien.

La fonction f est donc bien définie sur \mathbb{R} .

De plus, la fonction $t \mapsto |t|$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, f(x) \leq 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} |t| dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x |-u| (-du) = - \int_0^x |u| du = -f(x)$$

Ainsi, f est impaire.

Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto |t|$ qui s'annule en 0. Elle est donc dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = |x|$$

4.

$$f(x) = \int_1^x |t|^3 dt$$

La fonction $t \mapsto |t|^3$ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^x |t|^3 dt$ a bien un sens.

Ainsi, f est définie sur \mathbb{R} .

De plus, la fonction $t \mapsto |t|^3$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens. On a donc :

$$\forall x \geq 1, f(x) \geq 0, \quad \forall x \leq 1, f(x) \leq 0$$

La fonction f ne peut pas être paire (vu son signe) et n'est pas impaire puisque $f(0) \neq 0$. Aucune parité donc.

Enfin, f est exactement la primitive de $t \mapsto |t|^3$ qui s'annule en 1, donc par définition f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = |x|^3$$

5.

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, $f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 0$ car c'est le seul cas possible où $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ soit continue sur $[0, x]$.

$$D_f = [0, +\infty[$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, $\frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} \geq 0$, les bornes étant dans le bon sens, on a donc que :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt \geq 0$$

f n'étant pas définie sur $] -\infty, 0[$, elle ne peut être ni paire ni impaire.

Enfin, par définition, f est la primitive de $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^4 + 1}$$

6.

$$f(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc pour tout réel x , elle est continue sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$, l'intégrale a donc toujours un sens :

$$D_f = \mathbb{R}$$

De plus, $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \leq 0, f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, f(x) \leq 0$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \int_{-x}^0 \sqrt{1 + t^2} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_x^0 \sqrt{1 + (-u)^2} (-du) = - \int_x^0 \sqrt{1 + u^2} du = -f(x)$$

donc f est impaire.

Enfin, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = - \int_0^x \sqrt{1 + t^2} dt = -\varphi(x)$$

où φ est la primitive de $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$ qui s'annule en 0, donc f est bien dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\varphi'(x) = -\sqrt{1 + x^2}$$

7.

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ est définie et continue sur $] -\infty, -1[\cup] -1, 1[\cup] 1, +\infty[$.

L'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$ a bien un sens lorsque $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ est continue sur le segment $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), donc cela impose que $x \in] -1, 1[$ (car si $x \notin] -1, 1[$ la fonction sous l'intégrale ne serait pas continue sur tout le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$),

$$D_f =] -1, 1[$$

Pour tout $t \in] -1, 1[$, $\frac{1}{1-t^4} \geq 0$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in] -1, 0], \quad f(x) \leq 0$$

On a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1-t^4} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{1-(-u)^4} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{1-u^4} du = -f(x)$$

donc f est impaire.

Enfin, f est par définition la primitive sur $] -1, 1[$ de $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

8.

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , donc pour tout réel x l'intégrale $\int_1^x e^{-t^2} dt$ a bien un sens.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant toujours positive, l'intégrale est positive si et seulement si ses bornes sont dans le bon sens.

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall x \leq 1, \quad f(x) \leq 0$$

Vu le signe, f ne peut pas être paire, et comme $f(0) \neq 0$, f ne peut pas être impaire. Aucune parité. Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 1, donc f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x^2}$$

9.

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[x, 2x]$ (ou sur $[2x, x]$), donc l'intégrale est toujours bien définie.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est toujours positive, donc $f(x)$ est positif si et seulement si les bornes sont dans le bon sens

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad f(x) \leq 0$$

Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_x^{2x} e^{-(-u)^2} (-du) = - \int_x^{2x} e^{-u^2} du = -f(x)$$

Ainsi, f est impaire.

Notons φ une primitive sur \mathbb{R} de $t \mapsto e^{-t^2}$ (la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue, elle admet bien au moins une primitive), on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Ainsi, f est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

15 Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
3. Montrer que f peut se prolonger en une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
4.  tudier les variations de f .  tudier le signe de $f(x)$ sur le domaine de définition de f .
5. Tracer l'allure de la courbe de f .

1. La fonction f est-elle déjà bien définie sur $]0, +\infty[$?

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ donc l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ a bien un sens : $f(x)$ existe.

Remarquons que également que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur le segment $[2x, x]$ donc l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ a bien un sens : $f(x)$ existe également :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

De plus, puisque $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet une primitive φ de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle. On a alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \left[\varphi(t) \right]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Par somme et composition, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

2. On a pour tout $x > 0$, $2x > x$, donc $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[x, 2x]$ donc par positivité de l'intégrale,

$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq 0$. On a donc f croissante sur $]0, +\infty[$ et minorée par 0. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie ℓ en 0^+ : on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ell$.

Soit $x > 0$, on a :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \left[\ln(t) \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

La fonction $t \mapsto e^t$ est croissante sur $[x, 2x]$, donc :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

ou autrement dit que :

$$e^x \ln(2) \leq f(x) \leq e^{2x} \ln(2)$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $x \rightarrow 0^+$, par encadrement, on déduit alors que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$$

3.

$$f : \begin{array}{l} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt & \text{si } x > 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est à présent continue sur $[0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De plus,

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

Donc par le Théorème de Prolongement \mathcal{C}^1 , f est dérivable en 0, $f'(0) = 1$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

4. On a déjà déterminé l'expression de f' sur $] - \infty, 0[$. Il est facile de vérifier que cette expression est également valable sur $] - \infty, 0[$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \geq 0$$

Donc f est croissante sur $] - \infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$, donc puisqu'elle est de plus continue en 0, elle est croissante sur \mathbb{R} .

On a déjà dit également que f était positive sur $[0, +\infty[$.

De plus, pour tout $x < 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = - \int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt$$

et la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est négative sur $[2x, x]$, donc d'intégrale négative, et on a donc $f(x) \geq 0$.

Ainsi, la fonction f est positive sur \mathbb{R} .

5. Pour nous aider à tracer l'allure de la courbe, regardons les limites de f .

On a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^t}{t} \geq 1$, donc pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^{2x} 1 dt = (2x) - x = x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

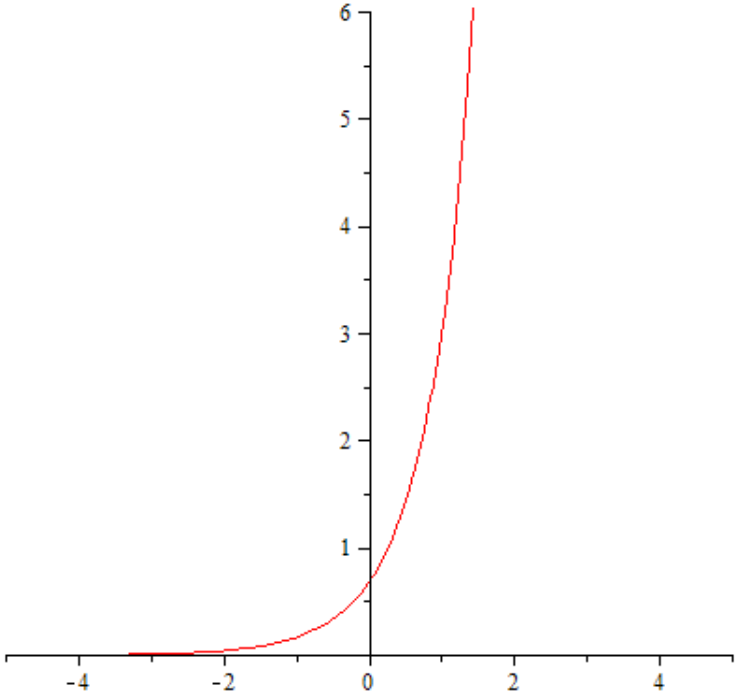
Par comparaison, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\forall t < -1$, $-\frac{1}{t} \leq 1$, on a donc :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{2x}^x \left(\frac{e^t}{-t} \right) dt \leq \int_{2x}^x e^t dt = e^x - e^{2x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$$

Par encadrement, (puisque f est positive), on a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

D'où l'allure de la courbe :



16 On pose $g(x) = (2x - 1) \int_{1/2}^x \frac{t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g .
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ est continue sur \mathbb{R} , donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt$ existe.

La fonction g est donc bien définie sur \mathbb{R} .

2. Soit $x \geq 1/2$. Alors $2x - 1 \geq 0$. De plus, φ est positive sur $[1/2, x]$ donc par positivité de l'intégrale $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt \geq 0$. Par produit on a donc bien $g(x) \geq 0$.

Soit $x \leq 1/2$. Alors $2x - 1 \leq 0$. De plus, $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt = - \int_x^{1/2} \varphi(t) \leq 0$ (mêmes raisons, puisque φ est positive, puis positivité de l'intégrale $\int_x^{1/2} \varphi(t) \geq 0$). Ainsi, par produit, on a bien $g(x) \geq 0$.

On a donc bien montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$$

3. On a de manière évidente déjà que $g(1/2) = 0$.

De plus, pour tout $x \neq 1/2$, la fonction φ étant positive sur $[1/2, x]$ (ou $[x, 1/2]$) et non identiquement nulle, l'intégrale $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt$ n'est pas nulle. Donc g ne s'annule qu'en $1/2$.

17 Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Démontrer que pour $x > 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$ est continue sur $[x, 2x]$ (ou $[2x, x]$), donc $f(x)$ est bien défini pour tout réel x :

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a à l'aide d'un changement de variable $t = -u$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + 1}} = - \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4 + 1}} = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire.

3. Soit $x > 0$. On a alors pour tout $t \in [x, 2x]$, $\sqrt{t^4 + 1} \geq \sqrt{t^4} = t^2$.

On a donc :

$$\forall t \in [x, 2x], 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \frac{1}{t^2}$$

D'où en intégrant :

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

On a donc bien :

$$\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$$

4. Par encadrement, on en déduit alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Puis, par imparité, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$