

**1** Calculer le terme général des suites  $(u_n)$  suivantes :

1.  $u_0 = 1, u_1 = 4$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$ .
2.  $u_0 = 2, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$ .
3.  $u_0 = 5, u_1 = 13$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$ .
4.  $u_0 = 2, u_1 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .

1. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = -2x - 1 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$$

Il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu n(-1)^n$$

Avec les conditions initiales, on a  $\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda - \mu = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -5 \end{cases}$ , donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n(1 - 5n)}$$

2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 2x - 4 \iff x^2 - 2x + 4 = 0 \stackrel{\Delta=-12}{\iff} x = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} \iff x = 1 \pm i\sqrt{3} \iff x = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

Avec les conditions initiales, on a  $\begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ , donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \left( 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)}$$

3. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 4x + 5 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \stackrel{\Delta=36}{\iff} x = \frac{4 \pm 6}{2} \iff x = 5 \text{ ou } x = -1$$

Il existe donc deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a 5^n + b (-1)^n.$$

Avec les conditions initiales, on a  $\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a - b = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ , donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n + 2(-1)^n}$$

4. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \stackrel{\Delta=1}{\iff} x = \frac{3 \pm 1}{2} \iff x = 2 \text{ ou } x = 1$$

Il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 1^n = \lambda 2^n + \mu$$

Avec les conditions initiales, on a  $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ , donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1}$$

**2** Soit  $M$  la matrice carrée d'ordre  $n \geq 2$  contenant uniquement des 1, sauf des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ .
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$  où  $(\alpha_k)$  est récurrente linéaire double et où  $\beta_k = (n-1)\alpha_k$ .

1. Si  $J$  désigne la matrice d'ordre  $n$  qui contient uniquement des 1, on a donc :

$$M = J - I$$

Il est facile de voir que  $J^2 = nJ$ , donc :

$$M^2 = (J - I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(M + I) + I = (n-2)M + (n-1)I$$

La matrice  $M$  est donc inversible car on a :

$$M \left( \frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I \right) = I$$

$$\text{et } M^{-1} = \frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I.$$

2. Puisque  $M^2 \in \text{Vect}(M, I)$ , il est alors facile de vérifier par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \alpha_k M + \beta_k I$$

avec  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  à déterminer.

En effet, on a  $M^0 = 0.M + 1.I$ ,  $M^1 = 1.M + 0.I$ ,  $M^2 = (n-2)M + (n-1)I$ .

Soit  $k \geq 0$ . Si  $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$ , alors on a :

$$M^{k+1} = M.M^k = \alpha_k M^2 + \beta_k M = \alpha_k(n-2)M + \alpha_k(n-1)I + \beta_k M = \left[ (n-2)\alpha_k + \beta_k \right] M + [(n-1)\alpha_k]I$$

On voit donc qu'on a donc encore  $M^{k+1} = \alpha_{k+1}M + \beta_{k+1}I$ , en posant :

$$\alpha_{k+1} = (n-2)\alpha_k + \beta_k \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = (n-1)\alpha_k$$

On a alors :

$$\alpha_{k+2} = (n-2)\alpha_{k+1} + (n-1)\alpha_k$$

La suite  $(\alpha_k)$  est donc récurrente linéaire double, d'équation caractéristique  $x^2 - (n-2)x - (n-1) = 0$ , de solutions  $-1$  et  $n-1$  :

$$\alpha_k = \lambda(n-1)^k + \mu(-1)^k$$

On trouve facilement que  $\lambda = 1/n$  et  $\mu = -1/n$ , d'où :

$$\alpha_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$$

et alors :

$$M^k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}M + \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}I$$

**3** 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in \mathbb{R}$  tel que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & u_n + 1 \end{pmatrix}$ .

2. Montrer que  $(u_n)$  est arithmético-géométrique. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1. Posons  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a alors :  $A = I + 3J$ .

La question est de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in \mathbb{R} / A^n = I_3 + u_n J$$

- Pour  $n = 0$ , il suffit de poser  $u_0 = 0$ . On a alors  $A^0 = I_3 = I_3 + u_0 J$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons qu'il existe un réel  $u_n$  tel que  $A^n = I_3 + u_n J$ . Alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (I_3 + u_n J)(I_3 + 3J) = I_3 + (u_n + 3)J + 3u_n J^2$$

Or,  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -J$ , donc on a :

$$A^{n+1} = I_3 + (u_n + 3)J - 3u_n J = I_3 + (-2u_n + 3)J = I_3 + u_{n+1} J \quad \text{en posant } u_{n+1} = -2u_n + 3$$

- Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $u_n$  tel que  $A^n = I_3 + u_n J$ .
2. Par construction de  $(u_n)$ , on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

La suite  $(u_n)$  est donc arithmético-géométrique.

L'équation caractéristique associée est  $x = -2x + 3 \iff x = 1$ .

La suite  $(u_n - 1)$  est donc géométrique de raison  $-2$ . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 1 = (-2)^n (u_0 - 1) \implies u_n = 1 - (-2)^n$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + (1 - (-2)^n) J$$

4 Calculer les limites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} - n)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 3) \ln \left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n^2)^{1/n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$1. \sqrt{n^2 + 2} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{(n^2 + 2) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

$$2. \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{1}$$

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} &= \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}$$

5.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp \left( n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \exp \left( n \left( \frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right) \quad \text{car } \boxed{\ln(1+x) = x + o(x)} \\ &= \exp(1 + o(1)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e} \end{aligned}$$

6. Toujours en utilisant  $\boxed{\ln(1+x) = x + o(x)}$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , on a :

$$(2n-3) \ln \left(\frac{n+3}{n+2}\right) = (2n-3) \ln \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = (2n-3) \left( \frac{1}{n+2} + o \left( \frac{1}{n+2} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n-3}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{2}$$

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$  Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$ , donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

Donc en sommant les inégalités :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}}$$

Or,  $\frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$  et  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , donc par théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

8.

$$(1+n^2)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+n^2)\right)$$

Or,

$$\frac{\ln(1+n^2)}{n} = \frac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n^2}))}{n} = 2\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc :

$$(1+n^2)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = \boxed{1}$$

9.

$$\frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty} \quad (\text{croissances comparées})$$

10. Posons pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ .

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

Comme  $e > 2$ , on peut donc dire qu'il existe un rang  $k$  tel que :  $\forall n \geq k, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2 \implies u_{n+1} \geq 2u_n$ .

Alors, pour tout  $n \geq k$ , on a :

$$u_n \geq 2u_{n-1} \geq 2^2u_{n-2} \geq 2^3u_{n-3} \geq \dots \geq 2^{n-k}u_k$$

On a donc :

$$\forall n \geq k, u_n \geq 2^n \times \frac{u_k}{2^k}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , donc par comparaison on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**5** Déterminer un équivalent simple des suites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

$$1. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$2. v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$3. w_n = \ln(1+n^3)$$

$$4. x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}$$

$$5. y_n = \binom{n}{k} \text{ (pour } k \text{ fixé).}$$

$$6. z_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{(e^{1/n} - e^{-1/n}) \left(\left(\frac{1}{n} + 1\right)^5 - 1\right)}.$$

$$1. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{n^2}}$$

$$2. v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$3. w_n = \ln(1+n^3) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n^3) = \boxed{3 \ln(n)}$$

4. En utilisant les DL  $\ln(1+x) = x + o(x)$  et  $\sin(x) = x + o(x)$ , on en déduit que  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , on a donc :

$$x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

5. Pour  $k$  fixé et  $n \geq k$ , on a :

$$y_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$

$$6. \text{ On a } \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En utilisant successivement  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ , on a :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}$$

En utilisant  $e^x = 1 + x + o(x)$ , on a :

$$e^{1/n} - e^{-1/n} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Et enfin en utilisant  $(1+x)^5 - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x$ , on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{n}$$

Finalement par produit et quotient, on a :

$$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{-1}{2n^2}\right)}{\frac{2}{n} \times \frac{5}{n}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{4n^2}}{\frac{10}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{40}}$$



- 6** 1. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ .
2. On note :  $\forall n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . Montrer que  $(S_n)$  converge vers un réel  $\ell$  tel que  $2 < \ell \leq 3$ .

1. Pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{2^{n-1}}{n!} = \binom{2}{n} \binom{2}{n-1} \cdots \binom{2}{3} \binom{2}{2} \leq 1$  (on a un produit de  $n - 1$  réels positifs inférieurs à 1 mais une récurrence permet de conclure plus rigoureusement! )
2. Soit  $n \geq 1$ . On peut écrire que :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3$$

Remarquons que la suite  $(S_n)$  est clairement croissante (somme de termes positifs), et comme  $S_2 = 5/2$ , on a :

$$\forall n \geq 2, \frac{5}{2} \leq S_n \leq 3$$

La suite  $(S_n)$  est donc croissante et majorée, elle converge vers un réel  $\ell$ , et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$2 < \frac{5}{2} \leq \ell \leq 3$$

**7** Soit  $(S_n)$  la suite définie par :  $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes. Qu'en déduire sur  $(S_n)$  ?

Notons pour tout  $n \geq 1, u_n = S_{2n}$  et  $v_n = S_{2n+1}$

- Pour tout  $n \geq 1,$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

- Pour tout  $n \geq 1,$

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leq 0$$

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

- Pour tout  $n \geq 1,$

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes. On en déduit alors que les suite  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent toutes les deux vers une même limite, et on en déduit finalement que la suite  $(S_n)$  converge.

8 On note pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

1. Montrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .
2. En déduire la limite de  $(S_n)$ .
3. On pose  $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$ . Montrer que  $(T_n)$  converge. En déduire un équivalent de  $S_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

1. Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or,  $2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$ , donc :  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ , ce qui fournit l'encadrement souhaité.

2. La réponse de la question précédente peut aussi s'écrire :

$$\forall k \geq 1, \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

(l'inégalité de droite est bien vraie également pour  $k = 1$  car on a bien «  $1 \leq 2$  »).

En sommant les inégalités pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient :

$$2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n \leq 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

autrement dit :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$$

Par comparaison (dans l'inégalité de gauche), on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty}$$

3.

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$$

La suite  $(T_n)$  est donc décroissante.

De plus, d'après l'encadrement de la question 2 :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \leq T_n \leq 0$$

Or, on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -2$$

donc il existe un rang  $N$  à partir duquel on a :  $\forall n \geq N$ ,  $-3 < 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n}$ . Ainsi :

$$\forall n \geq N, \quad -3 < T_n$$

La suite  $(T_n)$  est donc décroissante, et au moins à partir d'un certain rang, deviendra minorée par  $-3$ , donc converge. Il existe donc un réel  $\ell$  tel que :

$$T_n = S_n - 2\sqrt{n} = \ell + o(1)$$

Autrement dit :

$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) \implies \boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

**9** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de réels strictement positifs.

On suppose que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

1. Montrer que si  $u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $v_n \rightarrow +\infty$
2. Montrer que si  $v_n \rightarrow 0$ , alors  $u_n \rightarrow 0$ .

1. Remarquons que puisque les deux suites sont strictement positives, en composant par le logarithme, on obtient :

$$\forall k \geq 0, \quad \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \leq \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)$$

En sommant ces inégalités pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on obtient :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) \leq \ln(v_n) - \ln(v_0)$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty$ , donc par comparaison,  $\ln(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

2. En reprenant les inégalités précédentes, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(u_n) - \ln(u_0) \leq \ln(v_n) - \ln(v_0)$$

Si  $(v_n)$  converge vers 0, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$ , donc par comparaison, on a aussi

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

**10** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante car :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$ .

Ainsi, soit  $(u_n)$  converge, soit  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Si la suite  $(u_n)$  convergerait vers un réel  $\ell$ , alors par passage à la limite dans l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

on obtiendrait que  $\ell = \ell + e^{-\ell}$ , autrement dit  $e^{-\ell} = 0$ , ce qui est impossible.

Ainsi, nécessairement la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**11** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1/2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

1. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\mathcal{P}(n)$  : «  $0 \leq u_n \leq 1$  » est vraie.

- $n = 0$ ,  $u_0 = 1/2$  : c'est dans l'énoncé, donc  $0 \leq u_0 \leq 1$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie, i.e. que  $0 \leq u_n \leq 1$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également.

On a  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ .

Comme  $0 \leq u_n \leq 1$ , on a aussi  $0 \leq 1 - u_n \leq 1$ , donc par produit  $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq 1$ , ainsi, on a bien  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également.

- Par récurrence, la propriété est donc bien vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$$

donc la suite  $(u_n)$  est décroissante. Comme elle est minorée par 0, la suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell$  tel que  $\ell \geq 0$ .

Puisqu'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

par passage à la limite dans cette égalité, le nombre  $\ell$  doit nécessairement vérifier

$$\ell = \ell - \ell^2$$

ce qui nous donne donc que  $\ell^2 = 0$ , soit  $\ell = 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

**12** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

1. On procède par récurrence.

$u_0 = 1$ , donc on a bien  $u_0 > 0$ .

De plus, si pour un certain entier  $n$ , on a  $u_n > 0$ , alors par produit  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$ .

Ainsi, par récurrence, on a bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$ , donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Comme elle est de plus minorée par 0, elle converge vers un réel  $\ell$ . De plus, par passage à la limite dans la formule de récurrence, on obtient que :

$$\ell = \ell e^{-\ell} \implies \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \implies \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 \implies \ell = 0$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$



**13** Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .
2. Etudier la dérivée de  $f : x \mapsto \sqrt{4 + 3x}$  sur  $[0, +\infty[$
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$
4. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3$
5. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

1. On a  $u_0 = 1 \geq 0$ .

De plus, si pour un certain entier  $n$ , on a  $u_n \geq 0$ , alors  $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \geq 0$ .

Donc par récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

2. La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{4 + 3x}$  est bien dérivable sur  $[0, +\infty[$  et on a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3x}} > 0$$

3. La fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , dérivable sur  $[0, +\infty[$  et pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , on a :

$$|f'(t)| = \left| \frac{3}{2\sqrt{4 + 3t}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3t}} \leq \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [0, +\infty[, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

En particulier, pour  $x = u_n$  (car  $u_n \geq 0$ ) et  $y = 4$  (en remarquant que  $f(4) = 4$ ), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| = |f(u_n) - f(4)| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$$

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc :

$$|u_n - 4| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{n-2} - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^3 |u_{n-3} - 4| \dots$$

et en réitérant ce raisonnement  $n$  fois, on obtient que :

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$$

Or,  $u_0 = 1$ , donc  $|u_0 - 4| = 3$ . On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3}$$

5. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ , on en déduit par encadrement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| = 0$ , autrement dit que la suite  $(u_n)$  converge vers 4 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$$

**14** Soit  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}$$

1. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
2. En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons qu'ici :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{2 + u_n} = 2 - \frac{3}{2 + u_n} = f(u_n)$$

où  $\forall x \in ]-2, +\infty[$ ,  $f(x) = 2 - \frac{3}{2+x}$  La fonction  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  (composée de deux fonctions décroissantes).

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1/2$ , donc on a bien :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$$

Soit  $n \geq 0$ . Supposons qu'on ait  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

Alors,  $f$  étant croissante sur  $[0, 1]$ , on a :  $f(0) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1)$ , autrement dit :

$$0 \leq 1/2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Par récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

2. La suite  $(u_n)$  est donc croissante, et majorée par 1, donc elle converge vers un réel  $\ell$ .  
Puisqu'on a montré que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ , on a donc nécessairement (par passage à la limite dans l'inégalité) :

$$0 \leq \ell \leq 1$$

De plus, puisqu'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}$  et que  $\ell \neq -2$ , on peut passer à la limite dans l'égalité et on a :

$$\ell = \frac{2\ell + 1}{2 + \ell} \implies \ell(2 + \ell) = 2\ell + 1 \implies \ell^2 = 1 \implies \ell = 1 \quad (\text{car } \ell \geq 0)$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

**15** Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 \geq 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \geq 1$
2. La suite  $(u_n)$  est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite  $(u_n)$  diverge.

1. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , «  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ . ».

- $u_0$  est par définition donné vérifiant  $u_0 \geq 1$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons qu'on ait défini  $u_n$  tel que  $u_n \geq 1$ .

Alors  $u_n \neq 0$ , donc l'expression  $u_n^2 + \frac{2}{u_n}$  a un sens. Ainsi,  $u_{n+1}$  existe bien.

De plus, puisque  $u_n \geq 1$ , on a  $u_n^2 \geq 1$  et  $\frac{2}{u_n} \geq 0$ , donc on a bien  $u_{n+1} \geq 1$ .

- Par récurrence, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ .

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{u_n^3 - u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{(u_n + 1)(u_n^2 - 2u_n + 2)}{u_n}$$

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 - 2x + 2 > 0$  (car  $\Delta < 0$ ).

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ , la suite  $(u_n)$  est donc croissante.

3. Par l'absurde, supposons que la suite  $(u_n)$  soit convergente, vers un réel  $\ell$ .

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ , on a donc nécessairement  $\ell \geq 1$ .

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$ , par passage à la limite (sachant que  $\ell \neq 0$  puisque  $\ell \geq 1$ ), on a :

$$\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell} \implies \frac{(\ell + 1)(\ell^2 - 2\ell + 2)}{\ell} = 0 \implies \ell = -1$$

Ce qui est absurde puisque  $\ell \geq 1$ .

Ainsi, nécessairement, la suite  $(u_n)$  est divergente.

Et remarquons que puisqu'elle est croissante, on a donc obligatoirement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**16** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ .

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n$  existe et  $u_n \geq 0$ " est vraie.
2. Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .  
On note  $\alpha$  la solution positive. Montrer que  $\alpha \leq 1$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
4. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .
5. La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ?

1. Par définition  $u_0 = 0$  et donc  $u_0$  existe et  $u_0 \geq 0$ .

Soit  $n \geq 0$  et supposons que pour cet entier  $n$  on ait défini un nombre  $u_n$  avec  $u_n \geq 0$ .

Alors  $\frac{u_n+1}{u_n+2}$  a un sens (car  $u_n \neq -2$ ), donc  $u_{n+1}$  existe, et en tant que quotient de nombres

positifs, on a  $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2} \geq 0$ .

Par récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 0$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ . On a :

$$f(x) = x \iff \frac{x+1}{x+2} = x \iff x^2 + 2x = x + 1 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions, dont :  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$ .

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

4. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f'(x)| \leq 1/4$ . D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, |f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{4}|a - b|$$

En particulier pour  $a = u_n$  et  $b = \alpha$ , on obtient :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .

5. Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Et par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

- 17** 1. Étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \ln(x+1) - x$ . En déduire le signe de  $f$ .
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est défini et  $u_n > 0$ . La suite  $(u_n)$  est-elle monotone? convergente? si oui, préciser sa limite.

1. Pour tout  $x \geq 0$ , notons  $f(x) = \ln(x+1) - x$ . La fonction  $f$  est dérivable et on a :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$$

La fonction  $f$  est donc décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Or,  $f(0) = 0$ , donc nécessairement :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq 0$$

2. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .

- Par définition  $u_0 = 1 > 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons qu'on ait défini  $u_n$  tel que  $u_n > 0$ .  
Alors  $u_n + 1 > 1$ , donc  $\ln(u_n + 1)$  a bien un sens,  $u_{n+1}$  est défini.  
De plus,  $\ln(u_n + 1) > \ln(1) = 0$ , donc  $u_{n+1} > 0$ .
- Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Étudions la monotonie de  $(u_n)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n) \leq 0$$

donc  $(u_n)$  est décroissante.

De plus,  $(u_n)$  est minorée par 0, donc  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ .

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , on a nécessairement  $\ell \geq 0$ .

De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ , donc par passage à la limite (on a bien  $\ell + 1 > 0$ ), on a :

$$\ell = \ln(\ell + 1) \implies \ln(\ell + 1) - \ell = 0 \implies f(\ell) = 0 \implies \ell = 0$$

La suite  $(u_n)$  converge donc vers 0.

**18** Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [0, 1]$  par  $f(x) = 1 - x^2$ .

1. Montrer que  $[0, 1]$  est stable par  $f$ . En déduire que si  $u_0 \in I$ , la suite  $(u_n)$  donnée par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie.
2. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in [0, 1]$  pouvant être limite de la suite  $(u_n)$ .
3. On suppose  $u_0 \in ]0, \alpha[$ .
  - (a) Étudier le signe de  $f \circ f(x) - x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
  - (b) On pose  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ . Étudier la monotonie de  $(v_n)$ . Quelle est sa limite ? La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ?

1. Si  $x \in [0, 1]$ , alors  $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ , donc  $f(x) \in [0, 1]$ .  
L'intervalle  $[0, 1]$  est donc stable par  $f$ .

Par récurrence, si  $u_0 \in I$ , alors la suite donnée par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  est alors bien définie et on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .

2. Supposons que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\alpha$ .  
Alors puisque :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$ , on doit avoir :

$$\alpha = 1 - \alpha^2 \implies \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \implies \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Or, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ , on doit avoir  $0 \leq \alpha \leq 1$ , donc nécessairement :

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Si la suite  $(u_n)$  converge, cela ne peut être que vers  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

3. (a) Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= f(1 - x^2) - x = 1 - (1 - x^2)^2 - x = (1 - x) - (1 - x)^2(1 + x)^2 = (1 - x)(1 - (1 - x)(1 + x)^2) \\ &= (1 - x)(x^3 + x^2 - x) = x(1 - x)(x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Le signe de  $x(1 - x)$  est toujours positif, donc  $f \circ f(x) - x$  est toujours du signe de  $x^2 + x - 1$ .  
Donc :

$$\forall x \in ]0, \alpha[, f \circ f(x) - x < 0, \quad \forall x \in ]\alpha, 1[, f \circ f(x) - x > 0$$

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$ . On a donc  $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$ .

Remarquons déjà que l'intervalle  $]0, \alpha[$  est stable par  $f \circ f$ .

Si  $v_0 = u_0 \in ]0, \alpha[$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n} \in ]0, \alpha[$ .

De plus, on sait que pour tout  $x \in ]0, \alpha[, f \circ f(x) - x < 0$ , donc  $(v_n)$  est décroissante.

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante, et minorée par 0, elle converge. Mais puisque  $v_0 < \alpha$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0 < \alpha$ , donc  $(v_n)$  ne peut pas converger vers la valeur  $\alpha$  (elle converge vers 0 ici).

Ainsi, la suite  $(u_n)$  ne peut pas converger (car si elle converge, c'est nécessairement vers  $\alpha$ , et alors toutes les suites extraites devraient converger vers  $\alpha$  également).

**19** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 2\sqrt{n}$ .
2. Montrer que :  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$
3. Montrer que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$
4. Montrer que :  $u_n - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$
5. Montrer que :  $u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}$

1. On a bien  $u_0 \leq 0$ .

On a de plus  $u_1 = \sqrt{1} = 1 \leq 2$ .

Pour  $n \geq 1$ , si on suppose  $u_n \leq 2\sqrt{n}$ , alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n} + 1} = \sqrt{(\sqrt{n} + 1)^2} = \sqrt{n} + 1 \leq 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

Ainsi, par récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2\sqrt{n}}$$

2. D'après l'inégalité précédente, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} \implies \forall n \geq 1, 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 2\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc par encadrement, on en déduit que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ , autrement dit :

$$\boxed{u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(n)}$$

3. On en déduit que lorsque  $n$  devient grand :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$$

Ainsi puisque  $u_k \sim \sqrt{k}$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on a bien :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}}$$

4. On a :

$$u_{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} - \sqrt{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + n + 1} + \sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_n - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$$



5. On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} &= \sqrt{n+1+u_n} - \left( \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{(n+1+u_n) - \left( \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right)^2}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{n+1+u_n - \left( (n+1) + \frac{1}{4} + \sqrt{n+1} \right)}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4} = (u_n - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

et

$$\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$$

Donc par quotient :

$$u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n+1}}$$

autrement dit :

$$\boxed{u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}}$$

**20** Soit la suite  $(t_n)$  définie par  $t_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2}$ .

1. Etudier la monotonie de la suite  $(t_n)$ .
2. Montrer que  $(t_n)$  converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons déjà que, par une récurrence rapide, on a  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n > 0$ .

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{1 + nt_n^2} < 1$$

La suite  $(t_n)$  est donc décroissante.

2. La suite  $(t_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers un réel  $\ell$  tel que  $\ell \geq 0$ .

Si  $\ell \neq 0$ , alors  $nt_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , et alors par passage à la limite on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2} \implies \ell = 0$$

Ce qui est absurde puisqu'on avait supposé  $\ell \neq 0$ .

Finalement, on a donc nécessairement  $\ell = 0$ . La suite  $(t_n)$  converge vers 0.

**21** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x + x$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier positif  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  possède une unique solution que l'on notera  $u_n$ .
3. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
5. En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

1. La fonction  $f$  est continue (somme de fonctions continues) et strictement croissante (somme de fonctions strictement croissantes), donc réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[ = ]-\infty, +\infty[$ .
2. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $n \in ]-\infty, +\infty[ = f(\mathbb{R})$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  d'après la question 1, notée  $u_n$ . Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n)$$

3. La fonction  $f$  étant bijective continue et strictement croissante, la fonction réciproque  $f^{-1}$  est également continue et strictement croissante. Alors :

$$n < n + 1 \implies f^{-1}(n) < f^{-1}(n + 1) \implies u_n < u_{n+1}$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

4. Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , on a également  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$ . Ainsi :

$$u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

5. Notons que, par définition, pour  $n \geq 1$  :

$$e^{u_n} + u_n = n = e^{u_n} \left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)$$

Ainsi, en composant par  $\ln$ , on obtient :

$$u_n + \ln \left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) = \ln(n)$$

Or, comme  $u_n \rightarrow +\infty$ , on a  $\frac{u_n}{e^{u_n}} \rightarrow 0$  (par croiss.comp.), donc le terme de gauche est équivalent à  $u_n$  dans ce qui précède, d'où :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

**22** Soit pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $f_n$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $\forall x > 0, f_n(x) = nx + \ln(x)$ .

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0, +\infty[$ , qui appartient à  $]0, 1]$ . On notera  $x_n$  cette solution.
2. Montrer que  $(x_n)$  est décroissante.
3. En déduire que  $(x_n)$  converge vers 0.
4. Montrer que pour  $n \geq 3, x_n > \frac{1}{n}$ .
5. Etudier le signe de  $x - \ln(x)$  et en déduire que  $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

1. La fonction  $f_n$  est clairement continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $f_n(]0, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$ .

Puisque  $0 \in f_n(]0, +\infty[)$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement une solution dans  $]0, +\infty[$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1} = -x_{n+1} < 0$$

Ainsi,  $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$  et puisque  $f_n$  est croissante, on en déduit que  $x_{n+1} < x_n$ .

La suite  $(x_n)$  est donc décroissante.

3. La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .

Si jamais on avait  $\ell > 0$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, nx_n + \ln(x_n) = 0 \implies x_n = \frac{-\ln(x_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(\ell)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : \text{contradiction}$$

Donc la seule possibilité est que  $\ell = 0$ .

4. On a :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \ln(n) < 0 \text{ car } n \geq 3$$

D'où :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(x_n) \implies \boxed{\frac{1}{n} < x_n}$$

5. Pour tout  $x > 0$ , on sait que  $\ln(x) \leq x - 1 < x$ , donc  $x - \ln(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

On a alors :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}) > 0$$

D'où :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > f_n(x_n) \implies \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} > x_n}$$

**23** Pour  $n \geq 3$  et  $x \in [0, n]$ , on note :  $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$ .

1. (a) Étudier les variations de la fonction  $f_n$  sur  $[0, n]$ .  
 (b) En déduire que l'équation  $x^n = e^x$  a une unique solution dans l'intervalle  $[0, n]$ . On note  $u_n$  cette solution.
2. Montrer que  $\forall n \geq 3, u_n > 1$ .
3. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 3}$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 3}$  est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose :  $v_n = u_n - 1$ . Montrer que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

1. (a) Soit  $n \geq 3$ . La fonction  $f_n$  est bien dérivable sur  $[0, n]$  et on a :

$$\forall x \in [0, n], f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

$x$	0	$n$
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	-1	$(n/e)^n - 1$

(b) D'après les tableaux de variations donnés dans la question précédente, pour tout  $n \geq 3$ , la fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $[0, n]$ .

Elle réalise donc une bijection entre  $[0, n]$  et  $[f(0), f(n)] = [-1, (n/e)^n - 1]$ .

Or, puisque  $n \geq 3, \frac{n}{e} > 1$ , donc  $(n/e)^n - 1 > 0$ .

Puisque  $0 \in [-1, (n/e)^n - 1]$ , il existe donc un unique  $u_n \in ]0, n[$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ .

2. On a  $f_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$ , donc  $f_n(1) < f_n(u_n)$  et par stricte croissance de  $f_n$  sur  $[0, n]$ , on a alors  $1 < u_n$ .

3. Pour tout  $n \geq 3$ , on a :

$$f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^n e^{-u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} \times ((u_{n+1})^{n+1} e^{-u_{n+1}}) - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 < 0$$

On a donc  $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$  et par stricte croissance de  $f_n$  sur  $[0, n]$ , on en déduit que  $u_{n+1} < u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 3}$  est donc (strictement) décroissante.

4. La suite  $(u_n)_{n \geq 3}$  est donc décroissante et minorée par 1, elle converge vers un réel  $\ell$  qui doit vérifier  $\ell \geq 1$ . Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n)^n e^{-u_n} = 1 \implies n \ln(u_n) - u_n = 0 \implies \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} \quad (\text{car } \ell \neq 0)$$

On en déduit donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$ , ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

5. On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$ , donc :

$$\ln(v_n + 1) = \frac{v_n + 1}{n}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , on a  $\ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $1 + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ , d'où :

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

**24** Pour un entier  $n \geq 3$ , on pose  $f_n(x) = x - n \ln(x)$  pour  $x > 0$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f_n$  et esquisser son graphe.
2. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet deux solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On note  $u_n$  la plus petite solution de  $f_n(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante, et converge vers 1.
4. On pose  $u_n = 1 + v_n$ . Montrer que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

1. La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et on a  $\forall x > 0, f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}$ . La fonction  $f_n$  est donc strictement décroissante sur  $]0, n[$  puis strictement croissante sur  $]n, +\infty[$ .

On a clairement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$ .

Pour la limite en  $+\infty$ , on a :  $f_n(x) = x - n \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

$x$	0	$n$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	$\emptyset$	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$n(1 - \ln(n))$	$+\infty$

2. La fonction  $f_n$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, n[$ , donc réalise une bijection de  $]0, n[$  vers  $f_n(]0, n[) = ]n(1 - \ln(n)), +\infty[$ . Comme  $0 \in f_n(]0, n[)$  (car  $1 - \ln(n) < 0$  puisque  $n \geq 3 > e$ ), l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $]0, n[$ .  
De même, la fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $]n, +\infty[$ , donc réalise une bijection de  $]n, +\infty[$  vers  $f_n(]n, +\infty[) = [n(1 - \ln(n)), +\infty[$ . Comme  $0 \in f_n(]n, +\infty[)$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $]n, +\infty[$ .
3. Soit  $n \geq 3$ . Remarquons que  $f_n(1) = 1 > 0$ , donc nécessairement sur l'intervalle  $]0, n[$ ,  $f_n(1) = 1$  et  $f_n(u_n) = 0$ ,  $f_n$  étant strictement décroissante, on a donc  $1 < u_n < n$  :

$$\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < n$$

Soit  $n \geq 3$ .

La fonction  $f_{n+1}$  est décroissante sur  $]0, n + 1[$  et on sait que  $f_{n+1}$  s'annule en  $u_{n+1}$  sur cet intervalle. De plus,

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n + 1) \ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n) = -\ln(u_n) < 0$$

On a donc  $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ , avec  $f_{n+1}$  décroissante sur  $]0, n + 1[$  et  $u_n, u_{n+1}$  appartenant tous deux à cet intervalle, donc  $u_n > u_{n+1}$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

La suite  $(u_n)$  étant minorée par 1 et décroissante, elle converge vers un réel  $\ell \geq 1$ . Or, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \ln(u_n) \implies \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

La suite  $(u_n)$  converge donc bien vers 1.

4. On pose  $u_n = 1 + v_n$ , autrement dit,  $(v_n)$  converge vers 0. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \ln(u_n) \implies n \ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \implies nv_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \implies v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$



**25** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n : x \mapsto -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , il existe un unique  $x_n$  dans  $]0, 1[$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .

2. (a) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.

(b) Montrer que  $1 + \ln(1 - x_n) + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .

En déduire la limite de la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$ .

1. Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $f_n$  est continue sur  $]0, 1[$  (c'est une fonction polynomiale).

De plus,  $f_n$  est dérivable et  $\forall x \in ]0, 1[, f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$ , la fonction  $f_n$  est donc strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

Étant continue et strictement croissante,  $f_n$  réalise donc une bijection de  $]0, 1[$  vers  $f_n(]0, 1[)$ .

Or,  $f_n(]0, 1[) = ]f_n(0), f_n(1)[ = ]-1, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}[$ .

Comme  $0 \in f_n(]0, 1[)$ , il existe un unique réel  $x_n \in ]0, 1[$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .

2. (a) Soit  $n \geq 2$ .

On a  $f_n(x_{n+1}) = -1 + x_{n+1} + \frac{x_{n+1}^2}{2} + \dots + \frac{x_{n+1}^n}{n} = f_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = -\frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} < 0$ .

On a donc  $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$  donc  $x_{n+1} < x_n$  (puisque  $f_n$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ , avec  $x_n \in ]0, 1[$  et  $x_{n+1} \in ]0, 1[$ ).

Finalement, la suite  $(x_n)$  est donc décroissante.

Remarquons que, étant décroissante et minorée, la suite  $(x_n)$  est donc convergente.

(b)

$$\begin{aligned} 1 + \ln(1 - x_n) + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt &= 1 - \int_0^{x_n} \frac{1}{1-t} dt + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 1 - \int_0^{x_n} \frac{1-t^n}{1-t} dt \\ &= 1 - \int_0^{x_n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_n^{k+1}}{k+1} = f_n(x_n) = 0 \end{aligned}$$

De plus, remarquons que :

pour tout  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x_n} \int_0^{x_n} t^n dt \leq \frac{1}{1-x_0} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{1-x_0} \times \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .

On doit donc avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 - x_n) = -1$$

donc :

$$1 - x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1}, \quad \text{autrement dit} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-1}$$