Eléments de correction du DS3 (2020-2021)

Exercice 1 Polynômes

1. La base canonique de $\mathbb{R}_4[x]$ est $(1, x, x^2, x^3, x^4)$.
2. Soit f une fonction polynômiale appartenant à G alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel $x, f(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 + \mu x + \lambda$ et $f(-1) = -\lambda + \mu - \mu + \lambda = 0$ donc $x + 1$ divise f.
3. **Etude de F et G**
   (a) On vérifie les trois caractéristiques d'un sev : $F \subset \mathbb{R}_4[x]; F \neq \emptyset$ car $0 \in F$ et F est stable par combinaison linéaire. Idem pour G. **OU plus rapidement :** on écrit F et G comme des sous espaces vectoriels engendrés :
   $F = Vect((1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0)) = Vect(1 + x^4, x + x^3, x^2)$
   $G = Vect((1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0)) = Vect(1 + x^3, x + x^2)$
   (b) Soit $f \in F \cap G$ alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel $x, f(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 + \mu x + \lambda$ et il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$. Par identification des coefficients on a : $\lambda = a = b, \mu = b = c$ et $a = 0$ donc $f = 0$. F et G sont en somme directe.
   (c) La famille qui génère F est échelonnée en degré donc libre. Ainsi $dim(F) = 3$. La famille qui génère G est échelonnée en degré donc libre. Ainsi $dim(G) = 2$. On a : $dim(F) + dim(G) = 5 = dim(\mathbb{R}_4[x]), F$ et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[x]$.
4. **Etude de H**
   (a) H est stable par combinaison linéaire car la dérivation et l'évaluation pour $x = 1$ sont des applications linéaires.
   (b) H est un sev de $\mathbb{R}_4[x]$ donc $dim(H) \leq dim(\mathbb{R}_4[x]) = 5$. Si $dim(H) = 5$ alors $H = \mathbb{R}_4[x]$ or il existe des vecteurs qui sont dans $\mathbb{R}_4[x]$ et qui ne sont pas dans H par exemple la fonction polynômiale définie par $f(x) = x$. Ainsi on a bien $dim(H) \leq 4$.
   (c) Tous les vecteurs de la famille sont dans H. De plus la famille est échelonnée en degré, elle est libre et maximale donc c'est bien une base de H et $dim(H) = 4$.
5. **Etude de** $G \cap H$
   (a) $G \cap H \subset G$ donc $dim(G \cap H) \leq dim(G) = 2$. Par ailleurs $G \cap H \neq \{0\}$ car par exemple la fonction polynomiale définie par $f(x) = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ est dans $G \cap H$ ainsi $dim(G \cap H) \geq 1$
   Si $dim(G \cap H) = 2 = dim(G)$ alors on aurait $G \subset H$ c'est absurde car $x^3 + 1 \in G$ mais $x^3 + 1 \notin H$ ainsi $dim(G \cap H) = 1$.
   (b) Evident d'après la question 2 et la définition de H : si $f \in G \cap H$ alors 1 est racine de f et de f' donc 1 est racine d'ordre au moins 2 de f.
   (c) Il suffit de considérer un vecteur commun à G et à H par exemple $(1 + x)^3$, on a nécessairement $G \cap H = Vect((1 + x)^3)$.

Exercice 2 Matrices

Partie A

1. E est un sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ et il est non vide car il contient la matrice A par exemple. Si on se donne 2 matrices de E cela revient à se donner 4 réels a, b, a', b'. Soit également $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $aA + bB + \lambda(a'A + b'B) \in E$. On a : $aA + bB + \lambda(a'A + b'B) = (a + \lambda a')A + (b + \lambda b')B = M(a + \lambda a', b + \lambda b') \in E$ donc E est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sev de $M_3(\mathbb{R})$. Il est engendré par les matrices A et B qui ne sont pas proportionnelles donc $dim(E) = 2$.

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A \in E$. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A - B \in E$.

   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2B \in E$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2B \in E$.

   (b) $E = Vect(A, B)$ contient A^2, B^2, AB et BA donc E est stable par produit. On peut aussi le vérifier en se donnant a, b, a', b' 4 réels et en calculant :
   $(aA + bB)(a'A + b'B) = aa'A^2 + ab'AB + ba'BA + bb'B^2$
   $= aa'(2A) + ab'2B + a'b2B + bb'(A - B) = (2aa' + bb')A + (2ab' + 2a'b - bb')B \in E$

3. (a) On a facilement $A = \frac{1}{3}(2C + D)$ et $B = \frac{1}{3}(C - D)$

   (b) A et B commutent d'après la question 2)a), on peut donc appliquer les identités remarquables et on a : $C^2 = A^2 + 2AB + B^2 = 2A + 4B + A - B = 3A + 3B = 3C$;
   $D^2 = A^2 - 4AB + 4B^2 = 2A - 8B + 4(A - B) = 6A - 12B = 6D$;
   $CD = DC = A^2 - AB - 2B^2 = 0$.

   (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors d'après la question 3a) on a :
   $aA + bB = a\frac{1}{3}(2C + D) + b\frac{1}{3}(C - D) = \frac{1}{3}((2a + b)C + (a - b)D)$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(aA + bB)^n = \frac{1}{3^n}((2a + b)C + (a - b)D)^n$.
   Avec le binôme de Newton, puisque C et D commutent on a :
   $(aA + bB)^n = \frac{1}{3^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a - b)^k (2a + b)^{n-k} D^k C^{n-k}$
   $= \frac{1}{3^n}((2a + b)^n C^n + (a - b)^n D^n) = \frac{1}{3^n}((2a + b)^n 3^{n-1} C + (a - b)^n 6^{n-1} D)$
   $= \frac{1}{3}((2a + b)^n C + (a - b)^n 2^{n-1} D)$.

Partie B

1. Soit $(x, y, z) \in Ker(f)$.
   Alors $x - y = 0; -x + y = 0; 2z = 0 \iff x = y; z = 0 \iff (x; y; z) \in Vect(u)$.

2. u et v ne sont pas colinéaires donc il forment une famille libre.
   De plus, $w \notin Vect(u, v)$ car l'abscisse de w n'est pas égale à son ordonnée. On a donc une famille (u,v,w) qui est libre et de cardinal 3. Comme $3 = dim(\mathbb{R}^3)$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Avec un produit matricel on a $f(v) = 2v$ et $f(w) = 2w$

4. La matrice de f dans la base (u,v,w) est donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. (a) Les vecteurs colonnes de P forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$) donc P est inversible. Avec la méthode de Gauss Jordan ou en résolvant un système on trouve
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,25 & 0,25 & 1 \\ 0,25 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On priorise le produit matriciel. Ensuite, une récurrence immédiate permet de retrouver que pour tout entier naturel $A^n = PD^nP^{-1}$

Exercice 3 Suite implicite (ENS 2019, à l'oral)

1. La fonction $f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable en tant que polynôme et pour tout réel $x \geq 0, f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$. Ainsi la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Par ailleurs $0 \in [f_n(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[$ ainsi le théorème de la bijection assure que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0;+\infty[$. De plus $f_n(1) = 1$ donc $x_n < 1$ et $f_n(0) = -1$ donc $x_n > 0$.
2. (a) $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} + x_n - 1 = (x_n)^n x_n + x_n - 1 = (1 - x_n)x_n + x_n - 1 = (1 - x_n)(x_n - 1) < 0$ d'après la question 1.

   (b) $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ or la fonction f_{n+1} est strictement croissante donc elle conserve l'ordre ainsi $x_n < x_{n+1}$. La suite est croissante.

   (c) La suite est majorée par 1 d'après la question 1.

   (d) Le théorème de la limite monotone assure que la suite est convergente. Sa limite l est nécessairement positive et plus petite que 1.
   Supposons par l'absurde que $l < 1$. On sait que pour tout $n \geq 2, x_n^n \leq l^n$.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} l^n = 0$.
   Or par définition $x_n^n = 1 - x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - x_n = 1 - l > 0$ ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Ainsi $l = 1$.

Problème

Partie I

a) f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Il reste à vérifier la continuité en 0. Or on sait avec un équivalent usuel que : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Puisque $1 = f(0)$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

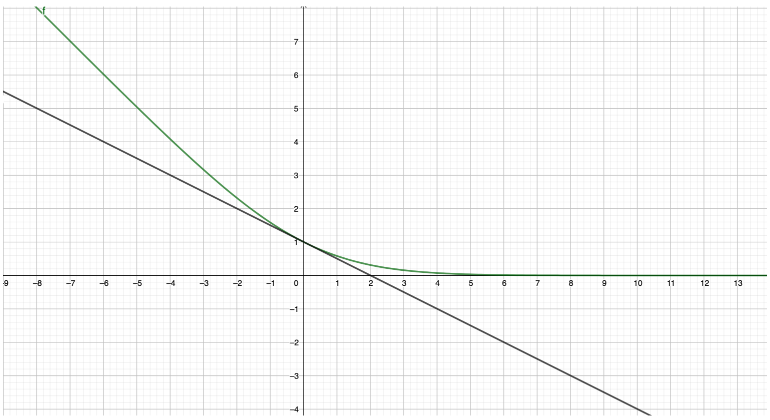
b) f est C^1 (et même C^∞) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions C^1, le dénominateur ne s'annulant pas et pour tout réel x non nul on a : $f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$.

c) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.
Comme $e^x > 0$, $u'(x)$ est du signe de $-x$ donc la fonction u est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur$[0;+\infty[$.

d) Par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

e) On remarque que le maximum de la fonction u est 0 ainsi pour tout réel x non nul, $u(x) \leq 0$. La fonction f' est donc négative sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

f) 

Partie II

1. On cherche s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = x \iff \frac{x}{e^x-1} = x \iff x = x(e^x-1) \iff x(2-e^x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = ln(2)$. Par ailleurs 0 n'est pas un point fixe de f donc f admet bien pour unique point fixe $\alpha = ln(2)$.

2. (a) Soit $x > 0; f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{(1-x)e^x-1+\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2(e^x-1)^2}$. Il s'agit de justifier que pour tout réel $x > 0, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$. Etudions la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif on a : $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x)$. On a besoin d'étudier le signe de $e^x - 1 - x$. On sait pas convexité que $e^x \geq 1 + x$. Ainsi par produit, $g'(x) \geq 0$ et g est croissante sur $]0;+\infty[$. Or $g(0) = 0$ donc pour tout réel $x > 0, g(x) \geq 0$ puis $f'(x) + \frac{1}{2}$.

   (b) On raisonne par disjonction de cas : si $x \neq 0$ alors d'après II 2(a) et I e on a $\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$. Comme on admet que $f'(0) = \frac{-1}{2}$, l'inégalité précédente devient vraie pour tout réel x.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité des accroissements finis à f. On sait que sur $[0; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ Ainsi : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ CQFD

(d) — I : $u_0 = 1$ et $(\frac{1}{2})^0 = 1$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$ (c'est même une égalité).

— H : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |1 - \alpha|$. Le résultat établi à la question précédente assure que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n |1 - \alpha|$ par hypothèse de récurrence.
On a bien : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |1 - \alpha|$.

— C : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tous les entiers n.

(e) Par encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Partie III

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $G(x) = F(2x) - F(x)$
2. f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x $F'(x) = f(x)$. Ainsi par composition G est C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :
$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.
Si $x \neq 0$, alors $G'(x) = \frac{4x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x - 1} = \frac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$
Si $x = 0$ alors $G'(0) = 2 - 1 = 1$.
3. (a) Soit $x \geq 0$. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, pour tout réel $t \in [x; 2x]$ on a : $f(0) \leq f(t) \leq f(x)$. En intégrant entre x et $2x$, les bornes étant dans le bon ordre, on a par positivité de l'intégrale : $xf(0) \leq G(x) \leq xf(x)$ d'où $0 \leq G(x) \leq xf(x)$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissances comparées.
   Le théorème d'encadrement assure donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$
4. Soit $x \leq 0$. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^-$, pour tout réel $t \in [2x; x]$ on a : $f(x) \leq f(t) \leq f(0)$. En intégrant entre x et $2x$, les bornes étant dans le mauvais ordre, on a par positivité de l'intégrale :
$xf(0) \leq G(x) \leq xf(x)$ d'où $x \leq G(x) \leq xf(x)$
On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} xf(x) = -\infty$ par opérations.
Le théorème de comparaison assure donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$
5. Grâce aux réponses des questions 2, 3 et 4, on a les tableaux suivants :

x	$-\infty$		0		$ln(3)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
G'		$+$	1	$+$	0	$-$	
G	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(ln(3))$	$\searrow$	0