Eléments de correction du DS3

Les méthodes sont rappelées en bleu.

Exercice 1

Lorsque l'implication "Si A alors B" est vraie on dit que A est suffisante pour avoir B. Réciproquement, lorsque l'implication "Si B alors A" est vraie on dit que A est nécessaire pour avoir B.

1. "Si les droites (d) et (D) sont confondues alors elles sont parallèles" est vraie donc A_1 est nécessaire à B_1. La réciproque est fausse.
2. "Si on considère une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$, non nuls échelonnés en degré alors elle est libre dans $\mathbb{R}_n[x]$ "est vraie donc A_2 est nécessaire à B_2. La réciproque est fausse.
3. "Si f est une application linéaire alors f(0)=0 "est vraie donc A_3 est suffisant pour avoir B_3. La réciproque est fausse.
4. "Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente "est vraie donc A_4 est suffisant pour avoir B_4. La réciproque est fausse.
5. Ni l'un ni l'autre.

Problème 1 : EDHEC 2019

1. (a) Une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche (ou à droite), et lorsqu'un polynôme annule une matrice, on retrouve facilement l'inverse de cette matrice
   $(A-I)^2 = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I = 0 \Leftrightarrow -A^2 + 2A = I \Leftrightarrow A(-A+2I) = I \Leftrightarrow$
   A est inversible d'inverse $-A+2I$

   (b) Une matrice est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul et son rang est maximal
   Le noyau de A est donc $\{0\}$ et le rang de A vaut 3.

   (c) Une application linéaire a les mêmes propriétés que la matrice qui lui est canoniquement associée
   f est bijective, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) On sait que $N^2 = 0$ donc pour $n \geq 2$, la formule du binôme de Newton donne
   $A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k = I + nN = I + n(A-I) = (1-n)I + nA$. Cette formule est aussi valable pour $n=0$ et pour $n=1$. Ainsi pour tout entier naturel n on a : $A^n = (1-n)I + nA$.

   (b) Pour $n=-1$ on a d'une part : $A^{-1} = -A + 2I$ et d'autre part $(1-n)I + nA = 2I - A$. La formule est donc vraie pour $n=-1$.

3. (a) L'application $f - id$ est canoniquement associée à $A - I = N$.

   (b) Par construction $(f-id)(e_1)$ correspond à la première colonne de la matrice N ainsi $u_1 = (-1,-2,1)$. On a $u_2 = (1,0,1)$

   (c) L'image d'une application linéaire g définie sur $\mathbb{R}^3$ est engendrée par les images des vecteurs d'une base : $\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ et le rang de g est la dimension de $\text{Im}(g)$
   $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Comme les 3 vecteurs colonnes de N sont colinéaires, on a :
   $rg(f - id) = rg(N) = 1$

(d) D'après le théorème du rang appliqué à $f-id$, on sait que :
dim(Ker($f-id$))=3 - rg ($f-id$)= 2. On cherche donc 2 vecteurs qui sont dans le noyau de $f-id$ et qui ne sont pas colinéaires. L'énoncé indique que u_1 et u_2 doivent convenir. On calcule Nu_1. On retrouve le vecteur nul. De même $Nu_2 = 0$.
u_1 et u_2 sont donc deux vecteurs de Ker($f-id$). Par stabilité par combinaison linéaire on est sûr que $Vect(u_1, u_2) \subset Ker(f-id)$. Comme u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires alors ils forment une famille libre de cardinal 2 et comme 2= dim(Ker($f-id$)) ; c'est une base de Ker($f-id$).

4. (a) On complète une famille libre en une base. La famille (u_1, u_2) est libre et $e_1 \notin Vect(u_1, u_2)$ ainsi (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de la base décomposées dans cette base.
Pour $1 \leq i \leq 2$, $f(u_i) = u_i$ car $u_i \in Ker(f-id)$ et
$u_1 = (f-id)(e_1) \Leftrightarrow u_1 = f(e_1) - e_1 \Leftrightarrow f(e_1) = u_1 + e_1$ donc on a bien
$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Avec la méthode de votre choix résolution d'un système, méthode de Gauss Jordan on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
On calcule alors PT= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
puis on multiplie à droite la matrice PT par P^{-1} et on retrouve bien A.

5. (a) C'est du cours La base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ est constituée de 9 éléments, les matrices $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ avec des zéros partout sauf au croisement de la ligne i et de la colonne j donc $dim(M_3(\mathbb{R})) = 9$.

(b) Notons F l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec T. Pour montrer que c'est un espace vectoriel, on montre que c'est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ en vérifiant les 3 points suivants :
- $F \subset M_3(\mathbb{R})$.
- La matrice nulle commute avec T donc $0 \in F$ et $F \neq \emptyset$
- Soient M et N des matrices qui commutent avec T et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
(λ M+N)T = λ MT+NT= λ TM+TN = T(λ M+N) donc F est stable par combinaison linéaire.

(c) On procède (par analyse-synthèse ou) par équivalence
Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On a $M \in F \Leftrightarrow MT = TM \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & d & a+g \\ b & e & b+h \\ c & f & c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & d+f & g+i \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} c & = 0 \\ f & = 0 \\ a & = i \\ b & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a(E_{1,1} + E_{3,3}) + dE_{1,2} + gE_{1,3} + eE_{2,2} + hE_{2,3}.$$

On a bien $F = Vect(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$.

(d) $(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille libre en tant que sous famille de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ et $E_{1,1} + E_{3,3} \notin Vect(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ donc $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est libre et génératrice de F donc dim(F)= 5.

(e) On raisonne par équivalence Notons G l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
Soit $J \in M_3(\mathbb{R})$. On a $J \in G \Leftrightarrow JA = AJ \Leftrightarrow JPTP^{-1} = PTP^{-1}J \Leftrightarrow$ $JPT = PTP^{-1}JP \Leftrightarrow P^{-1}JPT = TP^{-1}JP \Leftrightarrow P^{-1}JP \in F$

(f) On raisonne par équivalence $J \in G \Leftrightarrow P^{-1}JP \in F$
$\Leftrightarrow P^{-1}JP \in Vect(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$
$\Leftrightarrow JP \in Vect(P(E_{1,1} + E_{3,3}), PE_{1,2}, PE_{1,3}, PE_{2,2}, PE_{2,3})$
$\Leftrightarrow J \in Vect(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.
On a donc bien $G = Vect(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

Exercice 2 : ESCP 2016

1. C'est du cours La dimension de $\mathbb{R}_3[x]$ est 4 et sa base canonique est $(1, x, x^2, x^3)$.
2. On vérifie deux choses : que f est linéaire et que $Im(f) \subset \mathbb{R}_3[x]$
   - f est linéaire par linéarité de l'opération de dérivation.
   - Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$, alors il existe a, b, c, d des réels tels que $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a $P' = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P'' = 6ax + 2b$ donc
     $f(P) = (3x+8)(ax^3+bx^2+cx+d)-x(5-x)(3ax^2+2bx+c)+x^2(1-x)(6ax+2b)$
     Le coefficient devant x^4 est nul donc $deg(f(P)) \leq 3$.

   f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
3. Les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de la base canonique décomposées dans cette base.
   $f(1) = 3x + 8, f(x) = (3x + 8)x - x(5 - x) = 4x^2 + 3x$,
   $f(x^2) = (3x + 8)x^2 - x(5 - x)2x + x^2(1 - x)2 = 3x^3$,
   $f(x^3) = (3x + 8)x^3 - x(5 - x)3x^2 + x^2(1 - x)6x = -x^3$.
   On retrouve bien la matrice M.
4. L'image d'une application linéaire est engendrée par les images des vecteurs d'une base. En notant C_i les colonnes de M on a Im(f) = Vect(C_1, C_2, C_3, C_4) et le rang de f est la dimension de Im(f) C_3 et C_4 sont liées donc f n'est pas surjective car $rg(f) \leq 3$. (C_1, C_2) est une famille clairement libre et $C_3 \notin Vect(C_1, C_2)$ donc (C_1, C_2, C_3) est une famille libre et génératrice de $Im(f)$: $rg(f) = 3$.
5. D'après le théorème du rang, on a $dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(\mathbb{R}_3[x])$ donc $dim(Ker(f)) = 1$. On cherche donc 1 vecteur (ici c'est une fonction polynômiale) qui annule f Comme $C_3 = -3C_4$, on a $x^2+3x^3 \in Ker(f)$ donc $Ker(f) = Vect(x^2+3x^3)$

Problème 2 : Suites et séries ESCP 2016 et HEC 2019
Partie A

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$.
   On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)}(nu_{n+1} - (u_n + u_{n-1} + ... + u_2 + u_1)) =$ $\frac{1}{n(n+1)}(u_{n+1} - u_n + u_{n+1} - u_{n-1} + ... + u_{n+1} - u_2 + u_{n+1} - u_1) \geq 0$
   car la suite (u_n) est croissante. Donc la suite (v_n) est également croissante.

   (b) On sait que tous les termes de la suite (u_n) sont majorés par l. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $v_n \leq \frac{1}{n}(l + l + ... + l) = l$.

   (c) La suite (v_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite l' et on a $l' \leq l$ en passant à la limite dans l'inégalité précédente.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, 2v_{2n} = 2\frac{u_1+u_2+...+u_n+u_{n+1}+...+u_{2n}}{2n} = v_n + \frac{u_{n+1}+...+u_{2n}}{n}$
soit $2v_{2n} \geq v_n + \frac{u_n+...+u_n}{n}$ car la suite (u_n) est croissante.
On a bien $2v_{2n} \geq v_n + u_n$.

(b) En passant à la limite dans cette inégalité on obtient : $2l' \geq l' + l \iff l' \geq l$.
Avec l'inégalité obtenue à la question 1(c) on a forcément $l' = l$.

Partie B

1. C'est la définition d'une suite qui converge vers l.
2. Soit $n > N$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $|v_n - l| = |\frac{u_1-l+u_2-l+...+u_N-l+..+u_n-l}{n}| \leq \frac{|u_1-l|+|u_2-l|+...+|u_N-l|+...+|u_n-l|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l|$
3. On sait que pour tout $k > N, |u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En sommant ces inégalités pour k de $N+1$ à n on obtient : $\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l| \leq \frac{n-N}{n}\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| = 0$, il existe un entier naturel non nul M tel que pour tout $n > M, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$
   Ainsi d'après les questions précédentes, on a bien l'existence d'un entier naturel non nul $N' = Max(N, M)$ tel que pour tout $n > N', |v_n - l| \leq \epsilon$
4. On en déduit, par définition , que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Partie C

1. (a) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel n non nul on pose "$P_n : 0 < u_n < 1$"
Initialisation Pour n = 1 on a $u_1 = \frac{1+u_0^2}{2} \in [\frac{1+0^2}{2}; \frac{1+1^2}{2}[= [0,5;1[\subset]0;1[$
Hérédité Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $u_n \in]0;1[$. Alors ${u_n}^2 \in]0;1[$ puis $1 + {u_n}^2 \in]1;2[$ et enfin $u_{n+1} \in]0,5;1[\subset]0;1[$
Conclusion La propriété est vraie au rang 1 et elle se transmet donc elle est vraie pour tous les entiers naturels non nuls.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ or $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)^2}{2} > 0$ donc la suite est croissante.

(c) La suite est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel l. On sait par ailleurs que l est solution de l'équation $l = \frac{1+l^2}{2} \iff \frac{(1-l)^2}{2} = 0 \iff l = 1$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2. (a) Un quotient est bien défini lorsque son dénominateur est non nul. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 - u_n \in]0;1]$ donc t_n existe.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on calcule $t_{n+1} - t_n = \frac{w_n - w_{n+1}}{w_{n+1}w_n} = \frac{-u_n+u_{n+1}}{(1-u_{n+1})(1-u_n)} = \frac{(1-u_n)^2}{2(1-u_{n+1})(1-u_n)} = \frac{1-u_n}{1-{u_n}^2} = \frac{1}{1+u_n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{2}$ par opérations sur les limites.

(c) D'après la partie B de cet exercice on sait que la moyenne arithmétique des termes de la suite $(t_n - t_{n-1})_{n\geq 1}$ tend aussi vers $\frac{1}{2}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k - t_{k-1} = \frac{1}{2}$.
Mais cette somme est télescopique et on a : $\sum_{k=1}^{n} t_k - t_{k-1} = t_n - t_0 = \frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}$.
Par opérations sur les limites on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nw_n} = \frac{1}{2}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 2$

(d) On a donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ or $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite de termes positifs et la série harmonique diverge donc par le critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général w_n diverge également.

(e) On a $(w_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (\dfrac{2}{n})^2$. Par le critère d'équivalence de suites positives, en comparaison avec une série de Riemann convergente, on sait que la suite (S_n) est convergente. En fait les sommes partielles sont télescopiques, en effet pour tout entier naturel k on a ${w_k}^2 = (1-u_k)^2 = 2(u_{k+1}-u_k)$. Ainsi pour tout entier naturel n on a :
$S_n = 2(u_{n+1}-u_0)$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2(1-u_0)$. La somme de la série de terme général $(w_k)^2$ est $2(1-u_0)$.

Partie D

1. (a) Facile, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. .

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. On a : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+2u_n}{1+3u_n} < 1$ donc la suite est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel l solution de l'équation
   $l = l\frac{1+2l}{1+3l} \iff \frac{l^2}{1+3l} = 0 \iff l = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. (a) Un quotient est bien défini lorsque son dénominateur est non nul. Pour tout entier naturel n non nul, v_n existe d'après la question 1a.

   (b) Calculer avec des fractions...
   puis par opérations sur les limites on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. D'après la partie B de cet exercice on sait que la moyenne arithmétique des termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ tend aussi vers 1 soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$. Alors que la série de terme général (v_n) diverge grossièrement et comme pour tout entier naturel k non nul $v_k > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = +\infty$.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$. En fait cette somme est télescopique, en effet pour tout entier naturel non nul n on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$. Ainsi on a :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nu_n} = 1$ soit $\dfrac{1}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Par le critère d'équivalence de suites positives, en comparaison à la série harmonique divergente, la série de terme général (u_n) diverge.