Eléments de correction du DS2 (2020-2021)

Exercice 0 Les basiques

1. (a) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est libre et génératrice : ((1 ;0 ;0) ;(0 ;1 ;0) ;(0 ;0 ;1)).
   (b) Une sous-famille de la famille précédente par exemple ((0 ;1 ;0) ;(0 ;0 ;1)) est libre mais pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Une sur-famille de la base canonique par exemple ((1 ;0 ;0) ;(0 ;1 ;0) ;(0 ;0 ;1) ; (1 ;1 ;1)) est génératrice de $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.
   (d) Deux vecteurs colinéaires forment une famille liée et non génératrice de $\mathbb{R}^3$, par exemple ((0 ;0 ;2) ;(0 ;0 ;1)).
2. G = Vect((1 ;0 ;0) ;(0 ;1 ;0)) et F = Vect((0 ;0 ;1)) conviennent car la concaténation d'une base de G et d'une base de F donne une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On cherche 2 sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection n'est pas réduite au vecteur nul. Par exemple G = Vect((1 ;0 ;0) ;(0 ;1 ;0)) et F = Vect((1 ;0 ;0) ;(0 ;0 ;1)).
4. (a) Une primitive de la fonction ln est définie par $x \mapsto xln(x) - x$ d'où $\int_1^\pi ln(x)dx = \pi ln(\pi) - \pi + 1$.
   (b) On reconnait la formule $u'u$ qui est la dérivée de $\frac{u^2}{2}$ en posant $u(x) = Arctan(x)$.
   Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} Arctan(x)dx = [\frac{(Arctan(x))^2}{2}]_0^1 = \frac{\Pi^2}{32}$.
   Remarque : on peut aussi appliquer le changement de variable $u = Arctan(x)$.

Exercice 1 ANNULE ET REMPLACE
Suites, fonctions et intégrales (ECRICOME 2017)

1. (a) La fonction φ_a est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Il reste à vérifier la continuité en 0. Or on a : $\varphi_a \sim_0 -\frac{4a^2x^2}{2x} \sim_0 -2a^2x$. Or $\lim\limits_{x\to 0} -2a^2x = 0 = \varphi_a(0)$. Donc la fonction est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

   (b) La fonction φ_a est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions dérivable, le dénominateur ne s'annulant pas.
   Or pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, ${\varphi_a}'(x) = \frac{-2asin(2ax)\times sin(x) - (cos(2ax)-1)\times cos(x)}{sin^2(x)}$.
   (c) φ_a' est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ comme quotient, produit et somme de fonctions continues. Donc φ_a est C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.
   (d) On étudie la limite du taux d'accroissement suivant : $\frac{\varphi_a(x)-\varphi(0)}{x}$.
   $\frac{\varphi_a(x)-\varphi(0)}{x} = \frac{cos(2ax)-1}{x.sin(x)} \sim_0 -2a^2$ $(d'après\ 1.a)$.
   Donc φ_a est dérivable en 0 et $\varphi_a'(0) = \lim\limits_{x\to 0} -2a^2 = -2a^2$.
   (e) $\varphi_a'(x) = \frac{-2asin(2ax)\times sin(x)}{sin^2(x)} - \frac{(cos(2ax)-1)\times cos(x)}{sin^2(x)}$.
   $\frac{-2asin(2ax)\times sin(x)}{sin^2(x)} \sim_0 -4a^2$ et $\frac{(cos(2ax)-1)\times cos(x)}{sin^2(x)} \sim_0 -2a^2$. De plus :
   $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} -4a^2 = -4a^2 \\ \lim\limits_{x\to 0} -2a^2 = -2a^2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \varphi_a'(x) = -2a^2 = \varphi_a'(0).$$
   Donc φ_a' est continue en 0 soit φ_a est C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. (a) Soit $n \geq 1$ et $a \in E$.
   On pose $u(t) = \varphi_a(t)$ et $v'(t) = sin((2n+1)t)$ soit $v(t) = \frac{-cos((2n+1)t)}{2n+1}$.
   On a u et v qui sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $u'(t) = \varphi_a'(t)$.
   Une intégration par parties donne :

$$f_n(a) = 2([\varphi_a(t) \times \frac{-cos((2n+1)t)}{2n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_a'(t) \times \frac{cos((2n+1)t)}{2n+1} dt)$$
$$= 2(0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_a'(t) \times \frac{cos((2n+1)t)}{2n+1} dt).$$

$|f_n(a)| \leq 2\frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_a'(t)| dt$ par linéarité et inégalité triangulaire (on rappelle que pour tout réel $X, |cos(X)| \leq 1$).

φ_a' étant continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, elle est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], |\varphi_a'(t)| \leq M$. Donc $|f_n(a)| \leq 2\frac{1}{2n+1} M \times \frac{\pi}{2}$. On a l'inégalité souhaitée pour $A = M\pi$.

En appliquant le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = 0$.

(b) $f_0(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2at) - 1 dt = 2[\frac{sin(2at)}{2a} - t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{sin(\pi a)}{a} - \pi$.

(c) Soit $a \in E$ et $k \geq 1$.

Par linéarité
$$\begin{aligned} f_k(a) - f_{k-1}(a) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_a(t)[sin((2k+1)t) - sin((2k-1)t)]dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\varphi_a(t) sin(t) cos(2kt) dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(cos(2at) - 1) cos(2kt) dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2(a+k)t) + cos(2(a-k)t) - cos(2kt) dt \\ &= [\frac{sin(2(a+k)t)}{a+k} + \frac{sin(2(a-k)t)}{a-k} - \frac{sin(2kt)}{k}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{sin((a+k)\pi)}{a+k} + \frac{sin((a-k)\pi)}{a-k} - \frac{sin(k\pi)}{k} \\ &= \frac{(-1)^k sin(\pi a)}{a+k} + \frac{(-1)^k sin(\pi a)}{a-k} \\ &= (-1)^k sin(\pi a)(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}) \end{aligned}$$

3. En sommant les égalités précédentes pour k entre 1 et n :
$$\begin{aligned} f_n(a) - f_0(a) = \sum_{k=1}^n f_k(a) - f_{k-1}(a) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k sin(\pi a)(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}) \\ &= sin(\pi a)(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{a+k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{a-k}) \\ &= sin(\pi a)(I_n(a) - \frac{1}{a} + J_n(a)) \end{aligned}$$

D'où $f_n(a) = sin(\pi a)[I_n(a) + J_n(a)] - \pi$.

4. $\int_0^1 \alpha_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+a-1} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k [\frac{t^{k+a}}{k+a}]_0^1 = I_n(a)$.
$\int_0^1 \beta_n(t) dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-a-1} dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [\frac{t^{k-a}}{k-a}]_0^1 = J_n(a)$.

Exercice 1 INITIALEMENT PREVU Suites, fonctions et intégrales (ECE 2002)
Partie A

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction h_n est dérivable sur $]-1; +\infty[$ en tant que somme de composée et de quotient (le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition et pour tout $x > -1$ on a : $h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$
La fonction h_n est donc strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.
Remarque : On peut retrouver les variations de h_n par somme et composition en remarquant que pour tout $x > -1, h_n(x) = nln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x}$
2. $h_n(0) = 0$ ainsi la fonction h_n est strictement négative sur $]-1; 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $]0; +\infty[$.
3. (a) La fonction f_1 est dérivable sur $]-1; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$ et pour tout $x > -1$ on a :
$f_1'(x) = ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$.
(b) La fonction f_1 est donc strictement décroissante sur $]-1; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4. Soit un entier $n \geq 2$.
   (a) La fonction f_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout $x > -1$ on a :
   $f_n'(x) = nx^{n-1}ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$.
   (b) Si n est pair alors x^{n-1} change de signe en 0 donc $f_n'(x)$ est positif (nul en 0) et f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
   De plus par produit $\lim\limits_{x\to -1} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$
   Si n est impair alors $f_n'(x)$ est du signe de $h_n(x)$ donc f_n est donc strictement décroissante sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. De plus par produit $\lim\limits_{x\to -1} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$

Partie B

1. (a) Soit $x \in [0;1]$. On a : $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$
   (b) $U_1 = \int_0^1 xln(1+x)dx$. On pose $u(x) = ln(1+x)$ et $v'(x) = x$ soit $v(x) = \frac{x^2}{2}$.
   On a u et v qui sont C^1 sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1], u'(x) = \frac{1}{1+x}$.
   Une intégration par parties donne :
   $U_1 = [ln(1+x)\frac{x^2}{2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx$
   $= \frac{1}{2}ln(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx$
   $= \frac{1}{2}ln(2) - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x + ln(1+x)]_0^1$
   $= \frac{1}{2}ln(2) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1 + ln(2))$
   $= \frac{1}{4}$
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a :
   $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^n(x-1)ln(1+x)dx$. Les bornes sont dans le bon ordre et la fonction qu'on intègre est négative sur $[0;1]$ en tant que produit de deux facteurs positifs et d'un facteur négatif ainsi par positivité de l'intégrale,
   $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et la suite (U_n) est bien décroissante.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre), on a $U_n \geq 0$. Par ailleurs sur $[0;1]$ on a $x^n ln(1+x) \leq x^n ln(2)$. Ainsi en intégrant de part et d'autre de cette inégalité (les bornes étant dans le bon ordre) on a :
   $U_n \leq \int_0^1 x^n ln(2)dx$ soit $U_n \leq [\frac{x^{n+1}}{n+1}ln(2)]_0^1$ d'où $U_n \leq \frac{ln(2)}{n+1}$.
   (c) La suite (U_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.
3. (a) Soit $x \in [0;1]$ et $n \geq 2$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = -x \neq 1$ ainsi
   $S_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
   (b) D'une part, on a par linéarité de l'intégrale :
   $\int_0^1 S_n(x)dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{-(k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   D'autre part, toujours par linéarité de l'intégrale :
   $\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = [ln(1+x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$
   (c) Soit $n \geq 2$. On a $U_n = \int_0^1 x^n ln(1+x)dx$. On pose $u(x) = ln(1+x)$ et $v'(x) = x^n$ soit $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On a u et v qui sont C^1 sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1], u'(x) = \frac{1}{1+x}$. Une intégration par parties donne :
   $U_n = [ln(1+x)\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}dx$
   $= \frac{ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$
   $= \frac{ln(2)}{n+1} - \frac{1}{(-1)^n(n+1)}[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} - ln(2)] = \frac{ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n+1)}[ln(2) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}]$

   (d) Pour $n = 1$ le membre de droite vaut : $\frac{ln(2)}{2} - \frac{1}{2}[ln(2) - (1 - \frac{1}{2})] = \frac{1}{4} = U_1$.
   Donc oui, on peut généraliser cette formule au cas où $n = 1$.

Exercice 2

1. Pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur $[0;x]$ (ou sur $[x;0]$) en tant que quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. g est donc bien définie sur $]-1;+\infty[$.
2. Si $x \in]-1;0[$ alors les bornes sont dans le mauvais ordre et la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$ est négative sur $[x;0]$ donc g est positive sur $]-1;0[$. Si $x \in [0;+\infty[$ alors les bornes sont dans le bon ordre et la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$ est positive sur $[0;x]$ donc g est positive sur $[0;+\infty[$. g s'annule pour $x = 0$.
3. En tant qu'intégrale fonction de sa borne supérieure, on sait que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $\mathbf{x > -1, g'(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x+1}}}$. Comme g' est continue sur $]-1;+\infty[$; g est C^1 sur $]-1;+\infty[$. Comme $g'(x)$ est négatif sur $]-1;0]$ et positif sur $[0;+\infty[$, on sait que g est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
4. (a) Soit $t > 0$. $\frac{t}{\sqrt{t+1}} \leq \sqrt{t} \iff \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} \leq 1 \iff \sqrt{t} \leq \sqrt{t+1}$ ce qui est vrai par croissance de la fonction racine carrée sur $]0;+\infty[$.
   (b) Ainsi pour $x > 0$, on a par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre) : $g(x) \leq \int_0^x \sqrt{t}dt = [\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}]_0^x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
   Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = +\infty$, on ne peut pas déterminer la limite de g en $+\infty$ (l'inégalité n'est pas dans le bon sens).
5. (a) Soit $x > -1$. On pose $u(t) = t+1$. La fonction u est C^1 sur $[0;x]$ (ou sur $[x;0]$) et on a pour tout $t \in [0;x]; u'(t) = 1$ ainsi $g(x) = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int_1^{x+1} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}du$
   (b) On a donc : $g(x) = [\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u}]_1^{x+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} - (\frac{2}{3} - 2) = \sqrt{x+1}(\frac{2}{3}(x+1) - 2) + \frac{4}{3}$.
   (c) Par composition et produit on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
   (d) $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \frac{4}{3}$ est finie. On peut donc prolonger par continuité la fonction g à droite de -1 en posant $g(-1) = \frac{4}{3}$.

Exercice 3

1. (a) $det(A) = -35 + 36 = 1 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.
   (b) $det(P) = 8 - 9 = -1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
   Pour calculer PAP^{-1}, il faut prioriser.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $T = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   donc $N^2 = 0$ et pour $\mathbf{n \geq 2}$, la formule du binôme de Newton donne (puisque I_2 et N commutent) : $T^n = I_2 + nN$.
   Pour $n = 0$, on a $T^0 = I_2$ (la formule convient) et pour $n = 1$ on a $T^1 = T$ (la formule convient également).
   (d) Pour $n = 0$, l'égalité est vraie car $A^0 = I_2$ et $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PT^nP^{-1}$. Alors $A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1}$ d'après la question (b). On a bien par associativité
   $A^{n+1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n.
   (e) Il faut prioriser les produits matriciels, on a $PT^n = \begin{pmatrix} 2 & 2n+3 \\ 3 & 3n+4 \end{pmatrix}$.
   puis $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & -4n \\ 9n & 1-6n \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Partie A

1. F $=\{(x;y;y)\in\mathbb{R}^3, x,y\in\mathbb{R}\}=Vect((1;0;0);(0;1;1))$. Les vecteurs w=(1 ;0 ;0) et v=(0 ;1 ;1) sont dans F et ils ne sont pas colinéaires donc la famille (w ;v) est libre de cardinal 2 et elle est génératrice donc c'est une base de F. On a bien F = Vect(w ;v) et dim(F) = 2.
2. $\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, x-y=0 \text{ et } z-2y=0\}=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, x=y \text{ et } z=2y\}=\{(y;y;2y)\in\mathbb{R}^3\}=Vect((1;1;2))=G$.
3. (a) Soit $u=(x;y;z)\in F\cap G$ alors $x=y=z$ et $z-2y=0$ donc $-y=0$. u est le vecteur nul donc F et G sont en somme directe.
   De plus $dim(F+G)=dim(F)+dim(G)=3=dim(\mathbb{R}^3)$ et $F+G\subset\mathbb{R}^3$ donc $F\oplus G=\mathbb{R}^3$. **Remarque :** On peut aussi vérifier correctement que la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **METHODE 1 (non attendue car résultat admis)** Soit $u=(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$. On cherche à décomposer u dans la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue par concaténation des bases de F et G. On cherche donc les réels α,β,δ tels que
   $u=\alpha(1;0;0)+\beta(0;1;1)+\delta(1;1;2)$. Cela revient à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\alpha & + & & & \delta & = & a\\ & & \beta & + & \delta & = & b\\ & & \beta & + & 2\delta & = & c\end{array}\right.$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{ccccccc}\alpha & + & & & \delta & = & a\\ & & \beta & + & \delta & = & b\\ & & & & \delta & = & c-b\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & & & = & a-(c-b)\\ & \beta & & = & b-(c-b)\\ & & \delta & = & c-b\end{array}\right.$$

   Ainsi $u=[(a+b-c)(1;0;0)+(2b-c)(0;1;1)]+(c-b)(1;1;2)\in F\oplus G$
   La projection de u sur F parallèlement à G est bien donnée par
   $p(u)=(a+b-c)(1;0;0)+(2b-c)(0;1;1)=(a+b-c;2b-c;2b-c)$ et la décomposition de $u=(a,b,c)$ dans $F\oplus G$ est
   $(a+b-c;2b-c;2b-c)+(-b+c,-b+c,-2b+2c)$
   METHODE 2 Puisque la réponse est proposée il "suffit" de la tester. Cela demande de démontrer que $p(u)\in F$ et que $u-p(u)\in G$.

   (c) La matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}$.

Partie B

1. La matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
2. On vérifie facilement que $A^2=A$.
3. Soit $u=(x;y;z)\in Ker(f)$ alors $x+y-z=0$ et $y=0$ donc
   $x-z=0$ et $y=0$
   $Ker(f)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1;0;1)$.
   Pour montrer que $Ker(f)$ et G sont en somme directe, on considère
   $(x;y;z)\in Ker(f)\cap G$. Alors il existe un réel a tel que $(x;y;z)=(a;0;a)$ et il existe un réel b tel que $(x;y;z)=(b;b;2b)$ ainsi $b=0$ et $b=a$ donc $(x;y;z)=(0;0;0)$.
4. Le plus simple est de calculer AB et BA... On retrouve respectivement B et A.

Partie C

1. $r^2 = p^2 + pof + fop + f^2 = p + f + p + f = 2(p+f) = 2r \neq r$ donc r n'est pas un projecteur. **Remarque :** on peut travailler avec les matrices et vérifier que $(A+B)^2 \neq A+B$.
2. Soit $u \in Im(r-2id)$ Il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (r-2id)(v) = r(v) - 2v$. Ainsi $r(u) = r^2(v) - 2r(v) = 0$ d'après la question précédente donc on a bien $Im(r-2id) \subset Ker(r)$.
   Soit $w \in Ker(r-2id)$. Alors $r(w) = 2w$ donc par linéarité de $w = r(\frac{1}{2}w) \in Im(r)$ donc on a bien $Ker(r-2id) \subset Im(r)$.
   Remarque : on peut aussi caractériser les sous espaces vectoriels $Im(r-2id)$, $Ker(r), Ker(r-2id)$ et $Ker(r)$ avec une base. On trouve même que $Ker(r) = Im(r-2id)$.
3. $id = \frac{1}{2}(r - (r-2id))$
4. L'inclusion indirecte est évidente.
   Avec l'égalité obtenue à la question précédente, on sait que chaque vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire d'un élément $v = \frac{1}{2}r(u) = r(\frac{1}{2}u) \in Im(r)$ et d'un élément $w = (r-2id)(u) \in Im(r-2id) \subset Ker(r)$. Ainsi $u \in Im(r) + Ker(r)$. Montrons que $v \in Ker(r-2id)$. On a par linéarité $(r-2id)(v) = (r-2id)(\frac{1}{2}r(u)) = \frac{1}{2}(r^2(u) - 2r(u)) = 0$. CQFD Enfin $Ker(r) \cap Ker(r-2id) = \{0\}$ est évident (en l'écrivant) donc la somme est directe (et la décomposition est unique).

Remarque : Il faut VRAIMENT insister sur l'apprentissage des définitions et des hypothèses d'application d'un théorème pour améliorer la rédaction !

Festival d'erreurs lues dans les copies = à ne plus faire :

— confondre les objets ou les variables

— affirmer "f est dérivable car définie et continue"

— ne pas maitriser les notations

— ne pas introduire les objets utilisés, les variables

— écrire "g est croissante" : sur quel intervalle ? ? ?

— inventer des théorèmes comme "si F est une primitive de f alors $\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x)$" (prenez la fonction inverse et la fonction ln)

— ne pas expliquer sa démarche

— écrire $(\frac{\pi}{4})^2 = \frac{\pi^2}{8}$

— évoquer la "fonction $f(x)$"

— écrire C_1 à la place de C^1