Corrigé du devoir maison n°12

1a) Par croissances comparées on sait que $\lim_{x \to 0^+} xln(x) = 0$ donc par opérations on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe de f.

b) $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ donc par opérations on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est dérivable sur]0 ;+∞[en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$>0

d) La fonction f est continue et strictement croissante sur]0 ;+∞[à valeurs dans $\mathbb{R}$, or 0 ∈ $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$. On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ donc $\alpha \in]1; e[\subset [1; e]$.

2a) On raisonne par récurrence sur n ∈ $\mathbb{N}$:
Initialisation : $u_0 = e > \alpha$ d'après la question précédente.
Hérédité : Soit n ∈ $\mathbb{N}$, on suppose que $u_n > \alpha$ alors, la fonction f étant strictement croissante on a : $f(u_n) > f(\alpha) = 0$ puis $u_{n+1} = f(u_n) + u_n > u_n > \alpha$ par hypothèse de récurrence.
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.

b) Soit n ∈ $\mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) > f(\alpha) = 0$ donc la suite est strictement croissante.

c) En supposant que la suite admet une limite finie L on a nécessairement $L = f(L) + L$ soit $f(L) = 0$ ainsi $L = \alpha$ ce qui est impossible car la suite est strictement croissante et $u_0 > \alpha$. La suite n'admet donc pas de limite finie, étant strictement croissante on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$