Eléments de correction du DM 11 (2020-2021)

Partie A : Produit de convolution

1. (a) On trouve $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 14$

   (b) $S_0 = a_0 = 1, S_1 = a_0a_1 + a_1a_0 = 2, S_2 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 5,$
   $S_3 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 14, S_4 = a_0a_4 + a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1 + a_4a_0 = 42$

   (c) On remarque que pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}, S_n = a_{n+1}$.

2. (a) On effectue le changement de variable $j = n - k \iff k = n - j$.

   (b) On ajoute membre à membre les 2 égalités précédentes.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!(n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)!}{((n+1)!(n+1)!} = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ d'une part.
   D'autre part : $2(2n+1)a_n = 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+1)!}$
   CQFD

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $S_{n+1} + T_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k}(1+k)$
   $= a_0a_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+1-k}(1+k)$
   $= a_{n+1} + \sum\limits_{j=0}^{n} a_{j+1}a_{n+j}(j+2)$
   $= a_{n+1} + \sum\limits_{j=0}^{n} a_{n+j}2(2j+1)a_j$
   $= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n$
   $= a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n$
   $= a_{n+1} + 2(n+1)S_n$
   Par ailleurs, d'après la question 2(b) on a :
   $S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la proposition "$S_n = a_{n+1}$" est vraie.
   Initialisation : pour n = 0 on a fait les calculs dans la question 1 et on a bien $S_0 = 1 = a_1$
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $S_n = a_{n+1}$.
   Alors $S_{n+1} = \frac{2}{n+3}(a_{n+1} + 2(n+1)S_n) = \frac{2}{n+3}(a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1}) = \frac{2(2n+3)}{n+3}a_{n+1} = \frac{2(2(n+1)+1)}{(n+1)+2}a_{n+1} = a_{n+2}$ d'après la question 3(a).
   Conclusion La propriété est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

Partie B : Transformation d'Abel Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $W_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k) = a_1b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1})b_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k)$
   $= a_1b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} A_kb_k - \sum\limits_{k=2}^{n} A_{k-1}b_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_kb_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_kb_k$
   En changeant l'indice dans la deuxième somme, on a :
   $a_1b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} A_kb_k - \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_jb_{j+1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_kb_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_kb_k$
   $= a_1b_1 + A_nb_n - a_1b_1 = A_nb_n$

2. La suite $(|A_k|)$ étant majorée par M et la suite (b_k) étant décroissante on a :
   $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} M(b_k - b_{k+1})$
   Cette somme est télescopique d'où :
   $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_1 - b_n) \leq Mb_1$ car pour tout entier naturel $n, b_n \geq 0$.

3. On vient de justifier que la série de terme général $(A_k(b_k - b_{k+1}))$ est absolument convergente donc convergente (puisque les sommes partielles de la série de terme général $(|A_k(b_k - b_{k+1})|)$ sont majorées).
   La suite $(A_n b_n)$ converge vers 0 en tant que produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0.
   Enfin $(W_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n)$ est convergente en tant que somme de 2 suites convergentes.

4. (a) On cherche à appliquer le résultat précédent avec pour tout entier naturel $n, a_n = (-1)^n$ donc $A_n = -1$ ou 0. La suite $(|A_n|)$ est bornée par 1 et la suite (b_n) est décroissante de limite nulle donc la suite (W_n) est convergente c'est-à-dire que la série de terme général $((-1)^n b_n)$ converge.

   (b) Cette série n'étant pas à termes positifs, on regarde sa convergence absolue. On pose pour tout entier naturel non nul, $a_n = e^{in\theta}$. On sait que $|e^{i\theta}| < 1$ car $\theta \neq 2k\Pi$ ainsi la série géométrique de raison $|e^{i\theta}|$ est convergente de limite $\frac{1}{1-|e^{i\theta}|}$ donc la suite $(|A_n|)$ est bornée (inégalité triangulaire) et la suite $(b_n = \frac{1}{n})$ est décroissante de limite nulle. On est bien dans le cadre du résultat obtenu à la question 3 : la série de terme général $(\frac{e^{in\theta}}{n})$ est absolument convergente donc convergente.