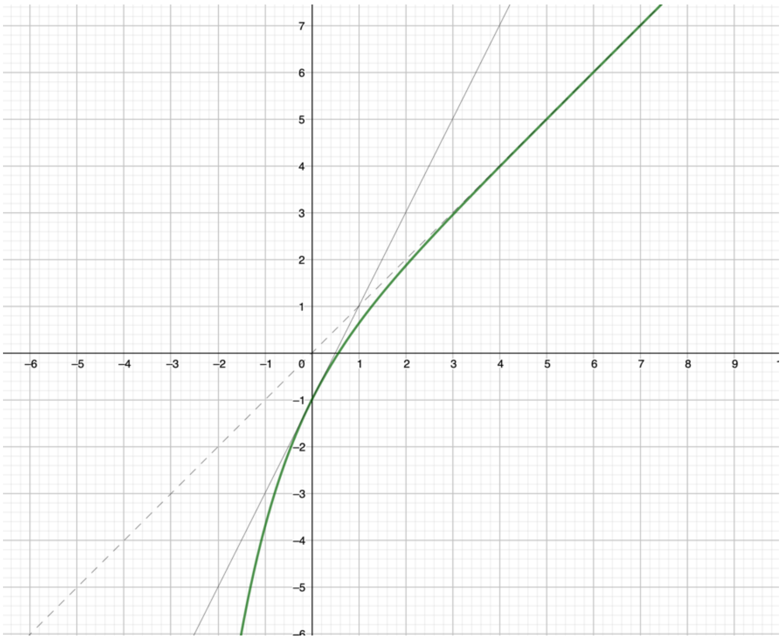
Corrigé du devoir maison n°10

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f_n'(x) = n + e^{-x}$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par opérations sur les limites on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$
Pour construire la courbe assez précisément, on précise que la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur n+1 ; la droite d'équation $y = nx$ est asymptote à la courbe de f_n en $+\infty$.
En prenant n = 1 :



La fonction f_n est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est de plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin $0 \in \mathbb{R} = f_n(\mathbb{R})$, ainsi le théorème de la bijection assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On note u_n cette solution. On a donc $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = e^{-u_n}$
(c) On a $f_n(0) = -1 < 0 = f_n(u_n) \Leftrightarrow 0 < u_n$ (car ${f_n}^{-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme f_n)
Par ailleurs $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{n}} = e^0 - e^{-\frac{1}{n}} > 0 = f_n(u_n) \Leftrightarrow \frac{1}{n} > u_n$
(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ainsi le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
On a $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = e^{-u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{e^{-u_n}}{n} \sim \frac{1}{n}$
(en effet par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n} = e^{-0} = 1$).