Eléments de correction du CB1 (2020-2021)

Exercice 1

1. $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\Pi}{4}}$ et $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\Pi}{3}}$ ainsi $\boxed{\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{e^{-i\frac{\Pi}{12}}}{\sqrt{2}}}$
2. En multipliant et en divisant par le conjugué du dénominateur on a :
$\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}+i\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}}$
3. En identifiant les parties réelles et imaginaires et en considérant la **parité** des fonctions cos et sin, on a :
$cos(\frac{\Pi}{12})=cos(-\frac{\Pi}{12})=\sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{4}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$;
$sin(\frac{\Pi}{12})=-sin(-\frac{\Pi}{12})=-\sqrt{2}\frac{1-\sqrt{3}}{4}=\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et par quotient :
$tan(\frac{\Pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{-2}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{2}=\boxed{2-\sqrt{3}}$

Exercice 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle par exemple que $\boxed{sin(2x) = 2sin(x)cos(x)}$ et $\boxed{cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)}$.

   (b) Pour tout entier relatif k, la fonction tan est définie sur $]\frac{-\Pi}{2} + k\Pi; \frac{\Pi}{2} + k\Pi[$. Ainsi la fonction $x \mapsto tan(2x)$ est définie s'il existe un entier relatif k tel que $\frac{-\Pi}{2} + k\Pi < 2x < \frac{\Pi}{2} + k\Pi$ d'où $\boxed{D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{-\Pi}{4} + k\frac{\Pi}{2}; \frac{\Pi}{4} + k\frac{\Pi}{2}[}$

   (c) Soit $x \in D$.

   On sait d'après la question 1a) que $tan(2x) = \frac{2sin(x)cos(x)}{cos^2(x)-sin^2(x)} = \boxed{\dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}}$ en factorisant par $cos^2(x)$ au dénominateur et en simplifiant.
   Remarque : il y a plusieurs réponses valables ici, tout dépend de la formule de $cos(2x)$ rappelée dans la question 1a).

   (d) Pour $X \neq 1$ et -1 :

$$
\begin{aligned}
-1 = \frac{2X}{1-X^2} &\iff -1 + X^2 - 2X = 0 \\
&\overset{\Delta=8}{\iff} X = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}}$$

   (e) On sait que pour $2x = \frac{-\Pi}{4}$, on a : $tan(2x) = -1 = \frac{2tan(\frac{-\Pi}{8})}{1-tan^2(\frac{-\Pi}{8})}$ ainsi $X = tan(\frac{-\Pi}{8})$ est la **solution négative** de l'équation : $-1 = \frac{2X}{1-X^2}$.
   On a bien $\boxed{tan(\dfrac{-\Pi}{8}) = 1 - \sqrt{2}}$

2. (a) $\Delta = 2 - 4(\sqrt{2} - 1) = -4\sqrt{2} + 6$.
   C'est un nombre strictement positif car $\sqrt{2} \approx 1,4 < 1,5$ donc $4\sqrt{2} \approx 5,6 < 6$.

   (b) Ainsi $\frac{\Delta}{2} = -2\sqrt{2}+3 > 0$. **Les nombres étant positifs, pour les comparer, comparons leur carré :**
   $(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2} = \frac{\Delta}{2}$. CQFD

   (c) D'après la question précédente,$\Delta = 2 - \sqrt{2}$. Les solutions de l'équation $X^2 - \sqrt{2}X + \sqrt{2} - 1 = 0$ sont donc $X = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pm(2-\sqrt{2})}{2}$ soit :
   $X = 1$ ou $X = \sqrt{2} - 1$.

$$\boxed{S_{(*)} = \{1; \sqrt{2} - 1\}}$$

   Posons $X = tan(x)$. Alors les solutions de (E) sont les réels qui vérifient $tan(x) = 1 = tan(\frac{\Pi}{4})$ ou $tan(x) = \sqrt{2} - 1 = tan(\frac{\Pi}{8})$ d'après la question **1e)**, la fonction tangente étant **impaire** sur son ensemble de définition.
   Finalement, la fonction tan étant périodique de période Π, l'équation $tan^2(x) - \sqrt{2}tan(x) + \sqrt{2} - 1 = 0$ a pour ensemble solution :

$$\boxed{S_{(E)} = \{\frac{\Pi}{8} + k\Pi; \frac{\Pi}{4} + k\Pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Problème 1

1. (a) f est **continue sur** $]0;+\infty[$ **par opérations** (produit et sommes) sur les fonctions continues. Par ailleurs, les **croissances comparées** et les opérations sur les limites donnent : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$.

   (b) Par **opérations** (produit et somme) on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

   (c) Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 1$. On sait que 0 est une solution par définition et sur $]0;+\infty[$ on a : $\frac{1}{2}x^2(3-2ln(x)) = 0 \iff 3-2ln(x) = 0$ $\iff x = e^{\frac{3}{2}}$. Ainsi $\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \{0; e^{\frac{3}{2}}\}}$.

   1 admet deux antécédents par f dans $[0;+\infty[$ donc f **n'est pas injective** sur $[0;+\infty[$ et a fortiori f n'est pas bijective sur $[0;+\infty[$.

   De plus f **étant continue sur** $[0;e^{\frac{3}{2}}]$ **et dérivable (par opérations sur les fonctions dérivables) sur** $]0;e^{\frac{3}{2}}[$ **et puisque** $f(0) = f(e^{\frac{3}{2}})$, le théorème de **Rolle** assure l'existence d'un point critique pour f sur $]0;e^{\frac{3}{2}}[$ donc sur $]0;+\infty[$.

2. (a) Par **croissances comparées et opérations** on a : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$.

   Cela prouve que $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et que } f'(0) = 0}$.

   (b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par **opérations** (produit et sommes) sur les fonctions dérivables et **pour tout réel** $x > 0$, on a :
   $f'(x) = x(3-2ln(x)) - x = x(2-2ln(x)) = 2x(1-ln(x))$

   (c) Par **croissances comparées et opérations** on a :
   $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ d'après la question 2a) ainsi $\boxed{f' \text{ est continue en 0}}$.

   (d) f' est par ailleurs continue sur $]0;+\infty[$ par opérations (produit et sommes) sur les fonctions continues donc $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$.

3. (a) On a les tableaux suivants :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2+1$	$\searrow$	$-\infty$

   (b) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution **sur** $[0;e[$ car $\forall x \in [0;e[, f(x) \geq 1 > 0$.
   Par ailleurs, la fonction f est **continue et strictement décroissante sur** $[e;+\infty[$, comme $0 \in]-\infty; \frac{e^2}{2}+1]$, le théorème de la bijection assure qu'il existe une unique solution $\alpha \in [e;+\infty[$ à l'équation $f(x) = 0$.
   Finalement il y a bien une seule solution sur $\mathbb{R}^+$ et on a :
   $f'(\alpha) = 2\alpha(1-ln(\alpha))$ or $f(\alpha) = 0 \iff ln(\alpha) = \frac{3\alpha^2+2}{2\alpha^2}$ ainsi
   $f'(\alpha) = 2\alpha(1-\frac{3\alpha^2+2}{2\alpha^2}) = 2\alpha\frac{-\alpha^2-2}{2\alpha^2} = \frac{-\alpha^2-2}{\alpha} = -\alpha - \frac{2}{\alpha}$

   (c) Au voisinage de α, on a $f(x - f(\alpha)) \underset{\alpha}{\sim} f'(\alpha)(x-\alpha)$ or $f(\alpha) = 0$ ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{\alpha}{\sim} (-\alpha - \frac{2}{\alpha})(x-\alpha)}$$

4. (a) g est infiniment dérivable sur $]0;+\infty[$ par opérations (produit et sommes) sur les fonctions dérivables, a fortiori g est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. En 0, on a vu que f est dérivable (à dérivée continue) donc g aussi. Pour $x > 0$, on a $g'(x) = f'(x) - 2$ et $g'(0) = f'(0) - 2 = -2$. Ainsi
   $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 2(1-ln(x)) = +\infty$ **n'est pas finie** donc
   $\boxed{g \text{ n'est pas deux fois dérivable en 0}}$.

(b) Pour tout réel $x > 0, g'(x) = f'(x) - 2$ et $g''(x) = f''(x) = -2ln(x)$. On a donc les tableaux suivants :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g'	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
g	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(c) On remarque que $g(1) = 0$ ainsi, $\forall x \in [0; 1], g(x) \geq 0$,
$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est donc au dessus de D sur } [0;1] \text{ puis en dessous sur } [1;+\infty[}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, A_n$ est bien définie car la fonction g est **continue sur** $[\frac{1}{n}; 1]$. La fonction g étant **positive** sur cet intervalle et **les bornes étant dans le bon ordre**, A_n représente l'aire sous la courbe de f ; au dessus de la droite D et entre les droites verticales d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

(b) $\forall x \in [\frac{1}{n}; 1]$, on pose : $u(x) = ln(x)$ et $v'(x) = x^2$. On a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On définit ainsi des fonctions u et v qui sont C^1 sur $[\frac{1}{n}; 1]$ et une IPP donne :
$I_n = [ln(x)\frac{x^3}{3}]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^2}{3}dx = -ln(\frac{1}{n})\frac{1}{3n^3} - [\frac{x^3}{9}]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{ln(n)}{3n^3} - (\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3})$

(c) $A_n = -I_n + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{3}{2}x^2 + 1 - (2x + \frac{1}{2})dx = -I_n + [\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x]_{\frac{1}{n}}^{1}$
$= -I_n - (\frac{1}{2n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n})$.

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{-1}{9}$ par **croissances comparées et par opérations**. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{9}}$.
C'est l'aire sous la courbe de f, au dessus de la droite D et entre les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 3

1. **Soit** $x \in \mathbb{R}$. On a $h(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1+x-x(1+e^x)}{1+e^x} = 0 \Longleftrightarrow 1 = xe^x \overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} e^{-x} = x$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations (composition et somme) sur les fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ donc la fonction g est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, le **théorème de la bijection** assure l'existence et l'unicité d'une seule solution à l'équation $g(x) = 0$.
   Comme $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}-2}{2e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e}-2}{2\sqrt{e}} < 0$ et $g(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$;
   on a bien $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.
3. (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations (somme et quotient, **le dénominateur ne s'annulant pas**) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $h'(x) = \frac{1+e^x-e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = e^x \frac{e^{-x}-x}{(1+e^x)^2} = e^x \frac{-g(x)}{(1+e^x)^2}$.
   La fonction h' est donc bien du signe de $-g$ et ainsi
   $\boxed{h \text{ est croissante sur }]-\infty; x_0] \text{ et décroissante sur } [x_0; +\infty[}$.

   (b) On admet que pour tout $x \in [\frac{1}{2}; 1]; |h'(x)| \leq \frac{1}{8}$ (il faudrait étudier les variations de h' sur $[\frac{1}{2}; 1]$ pour s'en assurer).
   La fonction h est **dérivable** sur $I = [\frac{1}{2}; 1]$; ainsi d'après **l'inégalité des accroissements finis (deuxième forme)** on a bien pour tous $a, b \in I = [\frac{1}{2}; 1]$; $|h(b) - h(a)| \leq \frac{1}{8}|b - a|$.
4. (a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $u_1 = h(u_0) = h(0) = \frac{1}{2}$ donc d'après la question 2, la propriété est vraie pour $n = 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq x_0$. On a $u_{n+1} = h(u_n)$ or la fonction h est croissante sur $]-\infty; x_0]$ donc sur $[0; x_0]$ ainsi
     $h(0) \leq h(\frac{1}{2}) \leq u_{n+1} \leq h(x_0)$ or $h(0) = \frac{1}{2}$ et $h(x_0) = x_0$.
     On a bien $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq x_0$
   - La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tous les entiers n non nuls.

   (b) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $u_1 = \frac{1}{2}$ et $x_0 < 1$ donc l'écart entre x_0 et u_1 est plus petit que $\frac{1}{2}$ et la propriété est vraie pour $n = 1$: $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $|u_n - x_0| \leq (\frac{1}{8})^{n-1}\frac{1}{2}$.
     Comme x_0 et u_n sont dans $[\frac{1}{2}; 1]$ le résultat établi à la question 3b) assure que $|h(u_n) - h(x_0)| \leq \frac{1}{8}|u_n - x_0| \leq (\frac{1}{8})^n\frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence.
     Or on sait que $u_{n+1} = h(u_n)$ et que $x_0 = h(x_0)$.
     Ainsi on a bien : $\boxed{|u_{n+1} - x_0| \leq (\frac{1}{8})^n \frac{1}{2}}$.
   - La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tous les entiers n non nuls.

BONUS : La suite (u_n) converge vers x_0 d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 4

1. Soit $x \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et strictement décroissante sur $[x-1; x]$ ainsi pour tout $t \in [x-1; x]$, $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Par **positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre**, on a : $\int_{x-1}^{x} \frac{1}{1+x^2} dt \leq \int_{x-1}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$ soit $\frac{1}{1+x^2} \leq \int_{x-1}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$. Avec le même raisonnement sur $[x; x+1]$, on a : $\int_{x}^{x+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{1+x^2}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{1+(n+1)^2} \geq 0$. Ainsi la suite $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes membre à membre pour $x = k \in [1; n]$, on a avec la relation de **Chasles** pour les intégrales :
   $\int_{1}^{n+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq S_n \leq \int_{0}^{n} \frac{1}{1+t^2} dt$. Et en remarquant qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto Arctan(t)$ on obtient :
   $Arctan(n+1) - Arctan(1) \leq S_n \leq Arctan(n) - Arctan(0)$
   d'où l'encadrement demandé puisque $Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $Arctan(0) = 0$.

   (c) On sait que pour tout entier n non nul, $\frac{\pi}{4} \leq Arctan(n) \leq \frac{\Pi}{2}$ donc
   (S_n) est bornée par 0 et $\frac{\Pi}{2}$.

   BONUS : La suite (S_n) est croissante et majorée donc elle est convergente (c'est le théorème de la limite monotone que nous reverrons au printemps). De plus en passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 2b) on a : $\frac{\pi}{4} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{\pi}{2}$