Matrices d'applications linéaires

K27.1 **Matthieu B.**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

K27.2 **Alice, Anastasia, Théophile**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

K27.3 **Léa**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

K27.4 **Constance Bo, Nicolas**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative aux bases canoniques est A.

1. Pour tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K27.5 **Justine, Quentin F.**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative aux bases canoniques est A. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K27.6 **Teresa**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K27.7 **Benjamin**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K27.8 **Noëlle, Tom**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

K27.9 **Emma, Juliane**

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui au triplet (x, y, z) associe le triplet $(3x-2y, 2x-4z, y-3z)$.

1. Ecrire la matrice B de f dans la base canonique.
2. Déterminer le rang de f. f est-elle bijective ?

K27.10 **Constance Bo, Nicolas**

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
3. f est-elle bijective ? Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

K27.11 **Justine, Quentin F.**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$,

$$f(P) = (X-1)\left(P(X) - \frac{1}{6}(X-1)^3 P^{(3)}(X)\right)$$

1. Pour $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $Q_k = (X-1)^k$. Justifier que $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire le rang, l'image et le noyau de f.

K27.12 **Emma, Juliane**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P + (X-1)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est bijectif.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, 2X, 3X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

K27.13 **Emile**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P'(X) - XP''(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

K27.14 **Anastasia**

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \phi(P) = \int_0^1 P(t)e^t dt$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Trouver la matrice de ϕ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

K27.15 **Léa**

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \phi(M) = {}^tM$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Trouver la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. ϕ est-elle un isomorphisme ?

K27.16 **Alice**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \phi(M) = A\,{}^tM$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le rang de ϕ.
4. Déterminer deux applications linéiares f et g telles que $\varphi = f \circ g$. Montrer que f est inversible, qu'en déduire pour g ?

K27.17 **Emile, Tom**

On pose trois fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f_1(x) = e^{-x} \\ f_2(x) = (x+1)e^{-x} \\ f_3(x) = (x^2-1)e^{-x} \end{cases}$$

On note $E = Vect(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = f'$$

(On admet que c'est un endomorphisme de E). Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$

K27.18 **Emma**

Calculer le rang de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

K27.19 **Léa, Matthieu B.**

Trouver selon la valeur de a le rang de :

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 2 & 1-a \end{pmatrix}$$

K27.20 **Anastasia**

Déterminer selon la valeur de a le rang de :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 5 \\ -1 & 4 & a \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

K27.21 **Justine, Quentin F.**

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 4 \\ 3 & -4-k & 12 \\ 1 & -2 & 5-k \end{pmatrix}$$

où k est un réel.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est inversible.

K27.22 **Nicolas**

$$A = \begin{pmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 3 & -2-k & -4 \\ -2 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

où k est un réel.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Pour quelle(s) valeur(s) de k, f n'est-elle pas bijective ?

K27.23 **Teresa**

Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - \lambda I_4$ ne soit pas inversible pour la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K27.24 **Emile**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - \lambda I_4$ ne soit pas inversible.

K27.25 **Justine, Quentin F.**

On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ qui à tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' &= -2y + y + 2z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= -2x + y + 2z \end{cases}$$

1. Déterminer le rang de h, une base de $\mathrm{Ker}(h)$ et une base de $\mathrm{Im}(h)$.
2. Déterminer la matrice de h^2. Quel est le rang de h^2 ? Son noyau ? Son image ?

K27.26 **Noëlle, Tom**

Soit E un espace vectoriel de dimension 2.
On considère f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer qu'on a obligatoirement $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.