Fractions rationnelles - Intégration sur un segment

Questions de cours

K24.1 **Jean-Damien, Matthieu P.**

Propriétés de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

K24.2 **Emile, Manon V.**

Intégration par parties

K24.3 **Alexandre, Camille, Constance Bo., Mathilde B., Mathilde L.**

Changement de variables.

K24.4 **Inès, Juliette**

Intégrales des fonctions paires et impaires.

K24.5 **Claire, Damien, Manon P., Marion**

Sommes de Riemann

Fractions rationnelles

K24.6 **Marie, Mathilde L.**

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

K24.7 **Claire, Martin**

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

K24.8 **Damien**

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x(x+2)(x-1)}$$

K24.9 **Camille, Constance Bo.**

Soit f la fonction définie sur $]-2,2[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une primitive de f.

K24.10 **Manon P., Marion**

Soit f la fonction définie sur $[4,6]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x(x-1)(x-3)}$$

À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer la valeur de $\int_4^6 f(x)dx$

K24.11 **Adèle, Cécile**

Calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx$$

K24.12 **Constance Be.**

Calculer :

$$I = \int_8^9 \frac{3x^2-19x+23}{x^3-10x^2+23x-14}dx$$

Intégration

K24.13 **Alexandre, Juliette**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \longmapsto \ln(x^2+1)$$

K24.14 **Manon V.**

Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de :

$$x \longmapsto \frac{\ln(x)^2}{x}$$

$\boxed{\text{K24.15}}$ Emile, Mathilde B.

Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de :

$$x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$\boxed{\text{K24.16}}$ Inès

Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de :

$$x \longmapsto x2^{x^2} + x^2 2^x$$

$\boxed{\text{K24.17}}$ Marie

Calculer :

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin(t)\cos^2(t)dt$$

$\boxed{\text{K24.18}}$ Constance Be.

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_0^{\pi/4} x\tan^2(x)dx$$

$\boxed{\text{K24.19}}$ Damien

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$I_n = \int_1^e t^n \ln(t)dt$$

$\boxed{\text{K24.20}}$ Jean-Damien, Matthieu P.

Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \sin(\ln(t))dt$$

$\boxed{\text{K24.21}}$ Manon P., Marion

Soit X un réel. Calculer à l'aide d'un changement de variable $u = e^{-t}$ l'intégrale :

$$I = \int_0^X \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

$\boxed{\text{K24.22}}$ Jean-Damien, Matthieu P.

Soit x un réel, $x > 1$. Calculer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$ l'intégrale :

$$I = \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt$$

$\boxed{\text{K24.23}}$ Martin

Calculer à l'aide d'un changement de variable l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$$

$\boxed{\text{K24.24}}$ Camille, Constance Bo.

Calculer à l'aide d'un changement de variable l'intégrale :

$$I = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$$

$\boxed{\text{K24.25}}$ Damien, Marie

On pose :

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{K24.26}}$ Constance Be.

$$F : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \text{Arcsin}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \text{Arccos}(\sqrt{t})dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier sa parité et sa périodicité.
3. Calculer sa dérivée et en déduire une expression simplifiée pour F.

$\boxed{\text{K24.27}}$ Damien

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2}dt$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est impaire.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Donner le sens de variations de f.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ xe^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x^2}$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

K24.28 **Emile**

Donner l'ensemble de définition, prouver la continuité et la dérivabilité, et calculer la dérivée de :

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

K24.29 **Cécile**

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Étudier son signe et sa parité.
3. Calculer la dérivée de F là où elle existe.

K24.30 **Claire, Martin**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}(1-e^{-n})$.
   Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

K24.31 **Manon P., Marion**

On admettra que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
Pour n entier naturel, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par :
   $$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} I_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$.

K24.32 **Juliette, Martin**

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$$

K24.33 **Cécile**

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$$

K24.34 **Camille**

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+3k}$$

K24.35 **Jean-Damien**

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$$

K24.36 **Inès, Mathilde B.**

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{1/n}$$

K24.37 **Alexandre, Manon V.**

Déterminer un équivalent simple de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

K24.38 **Adèle**

Etudier la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+(n-k)^2}$$

En particulier, si la suite converge, donner sa limite. Si la suite diverge, donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.