Dérivation. Convergence des suites.

Questions de cours

K19.1 **Benjamin, Emma, Léa, Mathilde M., Matthieu B., Quentin F.**

Théorème de Rolle

K19.2 **Benjamin, Mathilde M., Nicolas**

Théorème des Accroissements Finis

K19.3 **Nicolas**

Inégalité des Accroissements Finis

K19.4 **Alice, Constante Bo., Sergio**

Lien entre variations d'une fonction et signe de la dérivée.

K19.5 **Justine**

Fonctions convexes : définition, caractérisation, exemples

K19.6 **Emile, Quentin P.**

Suites arithmético-géométriques.

K19.7 **Anastasia, Caroline, Teresa, Tom**

Suites récurrentes linéaires doubles.

K19.8 **Matthieu B.**

Traduire en quantificateurs que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

K19.9 **Juliane**

Traduire en quantificateurs que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

K19.10 **Alice, Théophile**

Traduire en quantificateurs que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

K19.11 **Juliane, Théophile**

Soit (u_n) une suite bornée et soit (v_n) une suite convergeant vers 0.
Montrer que la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Exercices

K19.12 **Quentin F.**

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \cos(\sqrt{x})$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$?

K19.13 **Mathilde M.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la dérivée n-ième de la fonction

$$x \mapsto (x^2-1)^n$$

1. Donner une expression explicite de $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. A l'aide de la fonction f_n, montrer la formule suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
3. Montrer que f_n s'annule n fois sur $]-1,1[$.

K19.14 **Anastasia, Teresa**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
2. Calculer la dérivée d'ordre n de f.

K19.15 **Constance Bo.**

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que si f' admet exactement n zéros distincts, alors f en a au plus $n+1$.

K19.16 **Justine**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Montrer qu'il existe un $c \in]0,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

K19.17 **Anastasia, Teresa**

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, s'annulant en -1, 0 et 1. On note : $g : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^4 + x + f(x) \end{array}$.
Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

K19.18 **Alice, Sergio**

Soient a et b deux réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f'(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.
Indication : utiliser la fonction $g : x \mapsto e^{-x}(f(x) + f'(x))$.

K19.19 **Juliane, Théophile**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n \end{cases}$$

Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.

K19.20 **Léa, Quentin F.**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 6u_{n+2} - 7u_{n+1} - 3u_n = 0 \end{cases}$$

Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.

K19.21 **Anastasia, Teresa**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.

K19.22 **Juliane**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Etudier la monotonie de la suite (u_n).

K19.23 **Alice**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \qquad v_0 = \dfrac{1}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 3v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire double.
2. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n, puis exprimer v_n en fonction de n.

K19.24 **Quentin P.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S'_{n+1} = \dfrac{S'_n + S_n}{3}$.
3. Montrer que (S'_n) converge et trouver sa limite.

K19.25 **Léa**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

K19.26 **Alice**

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$
2. En déduire pour $k \in \mathbb{N}^*$, la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

K19.27 **Anastasia, Teresa**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(n+k)}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

K19.28 **Léa, Nicolas**

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

K19.29 **Caroline**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Pour $n \geqslant 1$, exprimer u_{n+1}^2 en fonction de u_n.
3. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. On pose $\forall n \geqslant 1,\ v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

K19.30 **Quentin F., Théophile**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-2, 2] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?

K19.31 **Constance Bo.**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \sqrt{1 + x}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On le déterminera.
3. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

4. Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

K19.32 **Justine**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (-1)^n \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \end{cases}$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, et le déterminer.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

K19.33 **Emma**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner la valeur de $f'(0)$?
   On admettra que

$$e^x - 1 - xe^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

2. En calculant $f''(x)$ pour tout $x > 0$, montrer que f' est croissante. En déduire que

$$\forall x > 0,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

3. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on déterminera. Montrer alors que pour tout $x \geqslant 0$,

$$|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

4. Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1} \end{cases}$$

K19.34 **Nicolas**

Soit a un réel fixé, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}(a - u_n^2) \end{cases}$$

1. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
2. On suppose que $a < 0$. Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire sa limite.
3. On suppose que $a = 2$.
   (a) Etudier brièvement la fonction
   $$f : x \mapsto x + \frac{1}{2}(2 - x^2)$$
   et montrer en particulier que :
   $$\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right],\ |f(x) - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$$
   En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

K19.35 **Benjamin**

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :

$$(E_n) \quad : \quad x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

K19.36 **Matthieu B.**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x} - \sin(x)$$

1. Démontrer qu'il existe un et un seul réel c de $]0,1[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par
   $$\forall x \in [0,1],\ g(x) = x + \frac{1}{2}f(x)$$
   On considère la suite (x_n) définie par
   $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$
   (a) Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $0 \leqslant g'(x) \leqslant k$.
   (b) Vérifier que $g([0,1]) \subset [0,1]$
   (c) En déduire que pour tout entier n,
   $$|x_{n+1} - c| \leqslant k|x_n - c$$
   puis que pour tout entier n,
   $$|x_n - c| \leqslant k^n|1 - c|$$
   (d) En déduire la limite de la suite (x_n).

K19.37 **Emile**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que f' est strictement décroissante et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :
   $$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$$
2. On pose pour tout $n \geqslant 1$,
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$$
   Montrer que (S_n) converge si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.
3. Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) définies par :
   $$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$$

K19.38 **Tom**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| > 1$.

1. Donner un exemple de telle fonction.
2. Montrer que f est monotone.
3. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la récurrence :
   $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   Montrer que la suite (u_n) est soit constante, soit divergente.

K19.39 **Sergio**

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers un réel L et on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. (a) On suppose $L = 0$. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0.
   (b) Démontrer que le résultat de la question 1.(a) reste valable lorsque $L \neq 0$.
   Il s'agit du *Théorème de Césaro.*
2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ divergente telle que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie dans la question 1 converge.
3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ w_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)^{1/n}$$

4. (a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel L strictement positif.
   Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ converge aussi vers L.
   (b) Si on pose :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n}{k}\right)\right)^{1/n}$$

   quelle est la limite de la suite (v_n) ?