Applications linéaires. Dérivation

Questions de cours

K18.1 **Cécile**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

K18.2 **Adèle, Alexandre, Damien, Manon P., Marie, Marion**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$

K18.3 **Capucine, Manon, Quentin P.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective.
Montrer que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est une famille libre de E, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_n}))$ est une famille libre de F.

K18.4 **Juliette, Mathilde L., Matthieu P.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$
Montrer que f injective si et seulement si f surjective.

K18.5 **Mathilde B.**

Théorème Limite de la Dérivée

K18.6 **Camille, Claire, Constance Be., Martin, Mathilde B.**

Théorème de Rolle

K18.7 **Inès, Jean-Damien, Juliette**

Théorème et Inégalité des Accroissements Finis

K18.8 **Manon V.**

Fonctions convexes : définitions, interprétation graphique.

Applications linéaires

K18.9 **Adèle, Cécile, Inès, Marion**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+y+2z) \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire. Déterminer (dans l'ordre de votre choix) son noyau, son image et son rang.

K18.10 **Alexandre, Claire, Constance Be., Jean-Damien**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+y, y-2x) \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire. Déterminer (dans l'ordre de votre choix) son noyau, son image et son rang.

K18.11 **Capucine, Marie, Quentin P.**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire bijective.

K18.12 **Damien, Manon P.**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\left(\mathrm{Ker}(g \circ f)\right)$$

K18.13 **Mathilde L.**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$$

K18.14 **Camille, Martin**

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{0_F}\}$$

K18.15 **Claire, Constance Be., Jean-Damien**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\dim(E) = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

K18.16 **Mathilde B.**

Soit E un espace vectoriel et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

1. Montrer que $y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.

K18.17 **Damien**

On rappelle qu'un projecteur de E est un endomorphisme f de E qui vérifie $f \circ f = f$.
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q) \iff p \circ q = p$ et $q \circ p = q$

K18.18 **Matthieu P.**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $f \circ g = Id$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
3. Soit p un projecteur de E, i.e. qui vérifie $p \circ p = p$. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
4. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

K18.19 **Manon V.**

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P + P' + P''$.

1. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = P + P' + P''$.

K18.20 **Jean-Damien**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 3f - 2Id_E$.

1. Montrer que f est un isomorphisme de E
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)$.

K18.21 **Camille, Martin**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -f$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

K18.22 **Juliette**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4Id_E = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2Id_E)$.
2. Que dire de $\mathrm{Im}(f - 2Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2Id_E)$?

K18.23 **Mathilde B.**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 6Id_E = 0$.

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha(f - 2Id_E))^2 = \alpha(f - 2Id_E)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3Id_E)$ par deux méthodes différentes, dont l'une utilisera l'exercice K18.13.

Dérivation sur un intervalle

K18.24 **Cécile, Constance Be., Inès, Marion**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.