Espaces vectoriels. Applications linéaires.

Questions de cours

K17.1 Emma, Nicolas

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

K17.2 Anastasia, Caroline, Constance Bo., Juliane, Mathilde M.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$

K17.3 Justine, Quentin F., Théophile

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

K17.4 Alice, Léa

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$
Montrer que f injective si et seulement si f surjective.

K17.5 Matthieu B.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective.
Montrer que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est une famille libre de E, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_n}))$ est une famille libre de F.

Exercices

K17.6 Caroline, Mathilde M.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x, y + z, 2x + 5y - z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer son noyau, son image et son rang.

K17.7 Léa

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x - 2y, 2x - 4z, y - 3z) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, et donner une base de chacun de ces espaces.

K17.8 Théophile

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + (X - 1)P'(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est bijectif.

K17.9 Alice

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + (1 - X)P'(X) \end{array}$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Quel est le degré de $\varphi(X^p)$? Déterminer l'image et le noyau de φ.
3. Soit $Q \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \varphi(P)$, avec $P(0) = P'(0) = 0$.

K17.10 Caroline, Mathilde M.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

tel que $f(P(X)) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application f est-elle bijective ? Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

K17.11 Anastasia

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P + P' + P''$.

1. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = P + P' + P''$.

K17.12 **Léa**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & d \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$.

K17.13 **Matthieu B.**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4Id_E = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - 2Id_E) \subset \text{Ker}(f + 2Id_E)$ et $\text{Im}(f + 2Id_E) \subset \text{Ker}(f - 2Id_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \text{Ker}(f + 2Id_E)$.
3. Que dire de $\text{Im}(f - 2Id_E)$ et $\text{Im}(f + 2Id_E)$?

K17.14 **Anastasia**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 2Id_E = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - Id_E) \subset \text{Ker}(f + 2Id_E)$ et $\text{Im}(f + 2Id_E) \subset \text{Ker}(f - Id_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + 2Id_E)$.
3. Que dire de $\text{Im}(f - Id_E)$ et $\text{Im}(f + 2Id_E)$?

K17.15 **Constance Bo., Juliane**

Soit T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui à M associe ${}^tM$.

1. Montrer que T est linéaire.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(T - Id) \oplus \text{Ker}(T + Id)$

K17.16 **Justine**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM - \alpha M \end{array}$$

où α est un réel fixé.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Décrire le noyau de f suivant les valeurs de α

K17.17 **Alice**

Soit E un espace vectoriel et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

1. Montrer que $y \in \text{Im}(p) \iff p(y) = y$
2. Montrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.

K17.18 **Emma**

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composée k-fois de f.

1. Montrer que, $\forall k \geqslant 1$, f^k est linéaire.
2. On prend $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit φ l'application qui à $P(X)$ associe $P(X+1) - P(X)$.
   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Montrer que $\varphi^4 = 0$
   (c) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$
   (d) Montrer que $Id - \varphi$ est inversible, d'inverse $Id + f + f^2 + f^3$.

K17.19 **Nicolas**

Soit A un polynôme de degré d. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe son reste par la division euclidienne par A.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Décrire $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ suivant les valeurs relatives de d et n.
3. Trouver $\varphi(X^n)$ lorsque $A(X) = X^2 - 4$.

K17.20 **Quentin F.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire.
On note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composée k-fois de f pour $k \geqslant 1$.

1. Montrer que, $\forall k \geqslant 1$, f^k est linéaire.
2. Montrer que $\forall k \geqslant 1$,
$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$$
   et
$$\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$$
3. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.
   Montrer que pour tout $m \geqslant k$, on a $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^k)$
4. Soit f vérifiant : $\exists p \geqslant 2,\ f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.
   Montrer que $p \leqslant \dim(E)$

K17.21 **Juliane**

Soit $f : E \to E$ linéaire, où E est un espace vectoriel.
On suppose que $\forall \overrightarrow{x} \in E$, la famille $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ est liée.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$