

Chapitre 06 - Limites/comparaisons de fonctions

1 - Limites d'une fonction

- Fonction définie au voisinage d'un point, de $+\infty$, de $-\infty$
- Limite au voisinage d'un point x_0 (limite finie, $+\infty$, $-\infty$)
- Limites à gauche, limites à droite
- Continuité en un point, fonctions prolongeables par continuité
- Limite au voisinage de $\pm\infty$ (limite finie, $+\infty$, $-\infty$)

2 - Opérations sur les limites

- Somme, produit, inverse, quotient
- Formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
- Croissances comparées de $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln(x))^\beta$ et $x \mapsto (e^x)^\gamma$
- Si $f \rightarrow \ell$, alors f est bornée au voisinage du point
- Règles sur les limites et la relation d'ordre
- Passage à la limite dans des inégalités (strictes deviennent larges)
- Théorèmes d'encadrement. Théorèmes de comparaison
- $f(x) \rightarrow \ell \iff |f(x) - \ell| \rightarrow 0$
- Produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0.
- Théorème de la limite monotone sous toutes ses formes

3 - Branches infinies des fonctions

- Asymptotes verticales, horizontales, obliques
- Branches paraboliques de dir. asymptotiques verticales, horizontales, $y = ax$

4 - Fonctions équivalentes

- Définition : $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$
- Equivalence avec quotient tend vers 1 (si les fnts sont non nulles)
- Cas des fonctions polynômes en $\pm\infty$
- Lien entre équivalents et limites.
- Avec les équivalents : produit, quotient, chgt de variable : ok!
- On ne somme pas les équivalents, on ne compose pas à gauche

- Le cas de la composition par le logarithme.
- Equivalents pour une fonction dérivable : équation de la tangente.
- Equivalents usuels à savoir :

$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$	$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$
---	--	--	---

5 - Fonctions négligeables

- Définition : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$
- Equivalence avec quotient tend vers 0 (si les fnts sont non nulles)
- Ecriture des croissances comparées
- Propriétés des "o". Lien avec fonctions équivalentes.

Démonstrations exigibles :

- Composition d'équivalents par la fonction ln.

Savoirs faire exigibles :

- Savoir traduire avec les quantificateurs une quelconque des phrases suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Calculer les limites d'une fonction en un point ou l'infini
- "Lever" les formes indéterminées.
- Savoir utiliser les croissances comparées
- Étudier les branches infinies d'une fonction
- Savoir traduire que $f(x) \sim g(x)$, que $f(x) = o(g(x))$
- Savoir manipuler les équivalents (produits, sommes, ...)
- Connaître parfaitement les équivalents usuels

La manipulation des "o" n'est pas un attendu de cette colle.