Chapitre 15 - Intégration sur un segment

1 - Primitives d'une fonction

- Primitives d'une fonction : définition
- Elles diffèrent toutes d'une constante
- Toute fonction continue en admet au moins une
- Tableau des primitives usuelles
- Tableau des primitives de composées.

2 - Intégrale d'une fonction continue sur un segment

- Définition à l'aide d'une primitive
- Cette définition ne dépend pas de la primitive choisie.
- Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: la primitive de f s'annulant en a.
- Fonction $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$: étude de continuité et dérivabilité
- Linéarité, relation de Chasles
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Intégration par parties : formule et bonne justification.
- Changement de variables : théorème général.
- Exemples (deux types : $u = \varphi(t)$ ou $t = \varphi(u)$)
- Cas particuliers : c.v. affines, c.v. $u = -t$.
- Intégrale des fonctions paires, impaires, périodiques.
- Positivité de l'intégrale, comparaisons
- Fonction positive d'intégrale nulle.
- Intégrales et valeurs absolues (majorations).

3 - Sommes de Riemann

- Lien entre intégrale et aire sous la courbe
- Subdivision régulière d'un segment $[a, b]$ en n segments
- Sommes de Riemann associées à f sur $[a, b]$
- Théorème de convergence lorsque f est continue sur $[a, b]$
- Cas particulier pratique : étude sur $[0, 1]$

Démonstrations exigibles :

– Propriétés de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
– Continuité et dérivabilité de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$
– Formule d'intégration par parties
– Formule de changement de variables

Savoirs faire exigibles :
– Savoir justifier si une fonction admet une primitive
– Connaître les primitives usuelles
– Savoir justifier l'existence d'une intégrale (sur un segment)
– Savoir faire une intégration par parties (en justifiant)
– Savoir faire un changement de variable (en justifiant)
– Savoir dériver une intégrale fonction de ses bornes.
– Savoir utiliser la positivité de l'intégrale.
– Reconnaître une somme de Riemann (sur $[0, 1]$) et conclure.

– Etude pratique : savoir décomposer en éléments simples une fraction rationnelle du type :

$$\frac{\alpha t + \beta}{(t - a_1)(t - a_2)}$$

où $a_1 \neq a_2$. (L'étude générale étant hors programme, on peut donner le (bon) résultat sans justification).