

CHAPITRE 10

Espaces vectoriels

"Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié de carré, ou, mieux, d'un parallélogramme : ils auraient été immédiatement conduits au vecteur, c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel. " *M. Serres*

Prerequis

- Chapitres 8 et 9
- Ensemble des nombres complexes

Objectifs

- Elargir ses connaissances sur les espaces vectoriels
- Définir une application linéaire entre 2 espaces vectoriels quelconques
- Notions de polynômes

Exercices d'application

- Exercices 2, 4 à 9, 11, 12, 14 du TD10

1 Définition

1.1 Espaces vectoriels de dimension n

Définition 1

Un **espace vectoriel de dimension n** est un ensemble E muni d'une opération interne $+$ (addition) et d'une opération externe \cdot (multiplication par scalaire), pour lequel il existe une bijection $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.

Remarque :

L'espace \mathbb{R}^n est donc l'espace vectoriel de dimension n « de référence ». Dès qu'un ensemble est en bijection avec \mathbb{R}^n par une application linéaire, il se comporte de manière similaire, et est donc appelé aussi espace vectoriel.

Exemples :

E1 – Dans \mathbb{R}^3 , considérons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En fait, puisqu'on a trouvé une base de cardinal 2 de ce sous-espace vectoriel, tous les vecteurs de F sont les vecteurs qui s'écrivent :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + b \end{pmatrix}$$

L'application $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est alors une application linéaire bijective entre F et \mathbb{R}^2 . Donc F est bien un espace vectoriel de dimension 2.

E2 – Plus généralement, dans \mathbb{R}^n , chaque sous-espace vectoriel de dimension p est en bijection linéaire naturelle avec \mathbb{R}^p , donc chaque « sous-espace vectoriel » de dimension p est plus généralement un « espace vectoriel de dimension p » puisqu'il se comporte exactement comme \mathbb{R}^p .

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels quelconques de dimensions respectives p et n .

On appelle toujours **application linéaire de E vers F** toute application f qui préserve les combinaisons linéaires :

$$f : E \rightarrow F \text{ est linéaire} \iff \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

et on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Lorsque $f(E) \subset E$, on dit que f est un **endomorphisme de E** , et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de E vers F** . Les espaces vectoriels E et F sont alors **isomorphes**.

Remarque :

Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Ainsi, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes les uns aux autres.

1.2 Extension des notions déjà vues**Définition 3**

Si E est un espace vectoriel quelconque de dimension n , on appelle **sous-espace vectoriel de E** tout ensemble F tel que :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- F est stable par combinaison linéaire.

Remarque :

Les sous-espaces vectoriels seront encore des espaces vectoriels inclus dans E , ils seront isomorphes à un des espaces \mathbb{R}^k avec $0 \leq k \leq n$.

Définition 4

Soit E un espace vectoriel quelconque de dimension n . On appelle **base de E** toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Remarques :

- R1** – Toutes les bases dans E ont nécessairement pour cardinal n si n est la dimension de E .
- R2** – Toute famille libre de n vecteurs dans E est une base.
- R3** – Toute famille génératrice de n vecteurs dans E est une base.
- R4** – La bijection structurelle f qui fait le lien entre E et \mathbb{R}^n permet de se ramener à la théorie de \mathbb{R}^n .

1.3 Restrictions d'applications linéaires**Définition 5**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives p et n , et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si G est un sous-espace vectoriel de E , on appelle **restriction de f à G** l'application :

$$f|_G : \begin{array}{l} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

L'application $f|_G$ est alors encore une application linéaire, allant de G vers F .

Remarques :

R1 – Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si G est un sous-espace vectoriel de E , on a :

$$\text{Ker}(f|_G) = G \cap \text{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f|_G) = f(G)$$

R2 – Le théorème du rang peut s'appliquer à f :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

mais aussi s'application à $f|_G$:

$$\dim(G) = \dim(\text{Ker}(f|_G)) + \dim(\text{Im}(f|_G))$$

R3 – Si f est un endomorphisme de E , alors la restriction de f à $\text{Im}(f)$ définit un endomorphisme de $\text{Im}(f)$.

2 Exemples usuels d'espaces vectoriels

2.1 Le plan complexe \mathbb{C}

Proposition 6

L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un espace-vectoriel de dimension 2. En effet, \mathbb{C} est isomorphe à \mathbb{R}^2 par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a + ib & \longmapsto & (a, b) \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathbb{C}) = 2}$$

Remarques :

R1 – On parle donc de « plan complexe » puisque \mathbb{C} se comporte dans sa structure exactement comme le plan \mathbb{R}^2 .

R2 – La base canonique de \mathbb{C} est celle qui est réciproque de la base canonique $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 , donc la base canonique de \mathbb{C} est $(1, i)$.

R3 – Chaque nombre complexe correspond alors à un vecteur avec 2 coordonnées. Par exemple le nombre $\sqrt{3} + i$ correspond au vecteur $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 7

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel de dimension np . En effet, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est isomorphe à \mathbb{R}^{np} par l'application :

$$f : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{np} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, \dots, a_{2,p}, a_{3,1}, \dots, a_{n,p}) \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$$

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$$

Remarque :

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est donc donnée par les **matrices élémentaires** $E_{i,j}$ qui comportent un 1 en position (i, j) et 0 sinon.

Exemples :

E1 – Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la base canonique est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc de dimension 4.

E2 – Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, la base canonique est

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est donc de dimension 6.

E3 – L'application Tr est une

E4 – Le déterminant n'est pas une

E5 – La transposition est une entre et

E6 – Les sous espaces vectoriels $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont dans $M_n(\mathbb{R})$.

E7 – $GL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

2.3 L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 8

Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit F un espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Fixons $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de F .

Alors, la donnée de f revient à connaître l'expression de $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)$ dans la base \mathcal{C} .

On appelle donc **matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C}** la matrice donnée par :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

Remarque :

La donnée d'une application linéaire revient exactement à la donnée de sa matrice dans deux bases précises (une au départ, et une à l'arrivée).

Proposition 9

Si E est un espace vectoriel de dimension p et F est un espace vectoriel de dimension n , alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, donc isomorphe à \mathbb{R}^{np} .

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Exemples :

E1 – Soit $f : E \rightarrow F$ avec $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$.

On suppose que E admet pour base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et F admet pour base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$.

Si $f(u_1) = v_1 + v_2$, $f(u_2) = -v_1 + v_2 + v_3$, $f(u_3) = v_3$ et $f(u_4) = v_1 + v_3$, alors la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E2 – Si $f : E \rightarrow F$ est l'application linéaire donnée dans une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de E et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de F par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cela signifie que $f(u_1) = v_1 + v_3$ et $f(u_2) = -v_1 + v_2 + 2v_3$. Ainsi, pour tout vecteur x de E , puisque

$x = au_1 + bu_2$, on a :

$$f(x) = af(u_1) + bf(u_2) = a(v_1 + v_3) + b(-v_1 + v_2 + 2v_3) = (a - b)v_1 + bv_2 + (a + 2b)v_3$$

Définition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E .

Fixons $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E .

Alors, la donnée de f revient à connaître l'expression de $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ dans la base \mathcal{B} .

On appelle donc **matrice de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}** la matrice carrée donnée par :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix}$$

Proposition 11

Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc isomorphe à \mathbb{R}^{n^2} .

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2$$

Remarque :

La donnée d'un endomorphisme revient exactement à la donnée de sa matrice relativement à une base précise (une au départ, et la même à l'arrivée).

3 Fonctions polynomiales

3.1 Définitions

Définition 12

Fonction polynomiale

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction f définie sur \mathbb{R} pour laquelle, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

Remarques :

R1 – Si f est une fonction polynomiale, on appelle **degré de cette fonction polynomiale** la puissance de x la plus grande apparaissant dans la fonction f (s'il y en a une) :

$$\deg(f) = \max(\{k \geq 0 / a_k \neq 0\}).$$

Par exemple, les fonctions polynômiales de degré 2 s'écrivent : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Les fonctions constantes non nulles sont de degré 0.

La fonction nulle est, par convention, de degré égal à $-\infty$.

R2 – On appelle **coefficient dominant** le coefficient devant x^n si $n = \deg(f)$.

Par exemple, si $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1$, on a $\deg(f) = 3$ et le coefficient dominant est 4.

R3 – On notera $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales.

R4 – On notera $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales qui sont de degré au maximum n .

Proposition 13

Si f est une fonction polynomiale non constante, on a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Plus précisément, si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ avec $a_n \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_nx^n$.

3.2 Racines et extrema d'une fonction polynomiale

Définition 14

Soit f une fonction polynomiale.

On dit qu'un réel x_0 est une **racine** de f si $f(x_0) = 0$.

Proposition 15

Toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

Remarque :

Le résultat n'est pas vrai pour une fonction polynomiale de degré pair. Par exemple $f : x \mapsto x^2 + 1$ n'admet aucune racine réelle.

Proposition 16**Factorisation d'une fonction polynomiale**

Soit $n \geq 1$, soit $f \in \mathbb{R}_n[x]$ une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et soit x_0 un réel. Alors :

$$x_0 \text{ est une racine de } f \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - x_0)g(x) \text{ avec } g \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

Définition 17**Multiplicité d'une racine**

Soit f une fonction polynomiale, et soit x_0 un réel.

On dit que x_0 est une **racine de multiplicité k** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - x_0)^k g(x), \text{ avec } g \in \mathbb{R}[x], g(x_0) \neq 0$$

Remarques :

- R1** – Si x_0 est racine de f , alors on peut factoriser $f(x)$ par $(x - x_0)$. Mais la fonction polynomiale quotient obtenue peut parfois encore être factorisée par $(x - x_0)$, etc. On parle donc de multiplicité pour savoir combien de facteurs $(x - x_0)$ peuvent apparaître au maximum dans f .
- R2** – Si x_0 est une racine de f de multiplicité $k \geq 2$, alors x_0 est une racine de f' de multiplicité $k - 1$.
- R3** – Une fonction polynomiale change de signe en une racine si et seulement si la multiplicité de cette racine est impaire.

Proposition 18

Une fonction polynomiale f admet un extremum local en un réel x_0 si et seulement si x_0 est une racine de f' de multiplicité impaire.

Remarque :

En particulier, si une fonction polynomiale vérifie pour un réel x_0 que : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$ alors x_0 est une racine de f' de multiplicité 1, donc f admet un extremum local en x_0 .

Si $f''(x_0) > 0$, la fonction f' est croissante au voisinage de x_0 , donc f admet un minimum en x_0 .

Si $f''(x_0) < 0$, la fonction f' est décroissante au voisinage de x_0 , donc f admet un maximum en x_0 .

3.3 L'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ en tant qu'EV

Proposition 19

Soit $n \geq 0$. L'ensemble $E = \mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur à n .

$$\mathbb{R}_n[x] = \{x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

est un espace vectoriel de dimension $n + 1$. En effet, $\mathbb{R}_n[x]$ est isomorphe à \mathbb{R}^{n+1} par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) & \longmapsto & (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \end{array}$$

$$\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$$

Exemple :

L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2 revient à définir les fonctions :

$$E = \mathbb{R}_2[X] = \{x \mapsto (ax^2 + bx + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Définir une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_2[X]$ revient à donner la liste de ses 3 coefficients. On a donc $\dim(E) = 3$.

Remarque :

La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est la base réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . C'est donc la famille

$$\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \dots, x \mapsto x^n)$$

que l'on peut écrire parfois abusivement :

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$$

Proposition 20

L'écriture d'une fonction polynomiale est unique dans la base canonique (puisque la base canonique est une famille libre). Ainsi, si deux fonctions f et g sont polynomiales et égales, on peut **identifier** les coefficients deux à deux dans les écritures.

Exemples :

$$\mathbf{E1} - ax^3 + bx^2 + cx + d = ex^2 + fx + g \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = e \\ c = f \\ d = g \end{cases}.$$

E2 – En particulier, la fonction polynomiale nulle est unique, tous ses coefficients égaux à 0.

Remarques :

R1 – $\mathbb{R}_0[x] = Vect(1)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Il est de dimension 1 car isomorphe à \mathbb{R} .

R2 – $\mathbb{R}_1[x] = Vect(1, x)$ est l'ensemble des fonctions affines. Il est de dimension 2 car isomorphe à \mathbb{R}^2 .

Proposition 21

*Une famille de fonctions polynomiales **non nulles** de $\mathbb{R}_n[x]$, de degrés différents, est nécessairement libre dans $\mathbb{R}_n[x]$.*

Exemple :

La famille $(1, x - 3, x(x + 1)(x + 2))$ est libre dans $\mathbb{R}_4[x]$.