CHAPITRE 1

Les nombres entiers

"Les mathématiques pures sont la poésie des idées logiques ." *Einstein*

Prerequis

— Manipuler des inégalités.

Objectifs

— Etudier le comportement d'une suite.

— Faire des démonstrations.

— Calculer des sommmes, des produits.

Exercices d'application

— 2, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 19, 20, 22 à 30, 32 , 33 à 36 du TD1

Définition 1 **Les ensembles de nombres**

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des **nombres entiers naturels**, c'est-à-dire les nombres entiers positifs ou nuls :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des **nombres entiers relatifs**, c'est-à-dire les nombres entiers de signe quelconque :
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers :
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, \text{avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les **nombres réels**.
- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble de tous les **nombres complexes**.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'on veut exclure le nombre 0 d'un ensemble, on utilise une étoile. On note alors :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

R 2 – Si p et n désignent deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $[\![p, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre p et n :

$$[\![p, n]\!] = \{p, p+1, p+2, \ldots, n-2, n-1, n\}$$

R 3 – Les ensembles précédents sont contenus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1 Introduction sur les suites

Définition 2 **Suites de réels**

Une liste ordonnée de nombres réels, indexée par des entiers naturels, est appelée une **suite**.
Si les éléments de la suite sont notés $u_0, u_1, u_2, \ldots$ on note la suite :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geqslant 0} = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$$

Remarques :

R 1 – Une suite peut être indexée sur $\mathbb{N}^*$ plutôt que sur $\mathbb{N}$.

R 2 – Une suite peut respecter une certaine logique ou non.

R 3 – Une suite est **bien définie** si on peut bien calculer chaque terme dans la liste $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

R 4 – La lettre d'indexation est muette. La suite peut donc être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement u.

R 5 – Soit $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est appelé **terme d'indice** n de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

R 6 – Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le terme d'indice "n" de cette suite que l'on note u_n.

R 7 – Ne pas confondre le nombre $u_n + 1$ avec u_{n+1}.

R 8 – L'ordre entre les éléments de la suite est important.

R 9 – Une suite peut être finie : si elle contient p éléments, $(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ est appelée une **p-liste** ou un **p-uplet**.

R 10 – Si $p = 2$, on dit qu'on a un **couple** (u_1, u_2). Les parenthèses signalent que l'ordre est important. Ainsi les couples (u_1, u_2) et (u_2, u_1) sont différents mais les ensembles u_1, u_2 et u_2, u_1 sont les mêmes.

R 11 – Si $p = 3$, on dit qu'on a un **triplet** (u_1, u_2, u_3).

R 12 – Avec les notations des chapitres suivants, une suite de réels est une **application** de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$).

$$(u_n)_{n\geqslant 0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Exemples :

E 1 – Une suite peut être définie explicitement par une formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Le symbole "$\forall$" signifie « **Pour tout** » ou « **Quelque soit** ». On connaît donc ici dès le départ chaque terme de la suite.

E 2 – Une suite peut être définie par une formule de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \dfrac{1}{u_n + 1} - u_{n+1} + 2 \end{cases}$$

Une suite récurrente nécessite d'avoir des informations sur le (ou les) premier(s) terme(s).
Une telle suite n'est pas forcément bien définie.

E 3 – Une suite peut être définie de manière implicite :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $e^{-x}x^n = 1$.
Une telle suite n'est pas forcément bien définie.
(L'équation admet-elle des solutions ? une unique ?)

2 Etude du comportement d'une suite

Définition 3 **Suites monotones**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}}$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n}$.
- Si les inégalités sont strictes, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemples :

E 1 – Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
Par exemple, la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$.

E 2 – Une suite est dite **croissante à partir d'un certain rang k** lorsque : $\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
De même, (u_n) est **décroissante à partir d'un certain rang k** lorsque : $\forall n \geqslant k, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$.

Remarques :

R 1 – Une suite est **stationnaire** si elle constante à partir d'un certain rang.

R 2 – Pour étudier les variations d'une suite définie explicitement, il suffit d'étudier les variations de la fonction associée sur $[0; +\infty[$. (cf exemple E1)

R 3 – Pour étudier les variations d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs : on regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, pour $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$,

R 4 – Si tous les termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, i.e. si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, alors pour étudier les variations de la suite on peut comparer le rapport de deux termes consécutifs à 1 (cf exemple précédent) :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

Définition 4 **Suites majorées, minorées, bornées**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si

$$\boxed{\exists m, M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M}$$

ou de manière équivalente en utilisant les valeurs absolues, si : $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \alpha}$

Remarques :

R 1 – Un réel m (resp. un réel M) qui vérifie les inégalités précédentes est appelé un **minorant** (resp. un **majorant**) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

R 2 – Le symbole "$\exists$" signifie « **il existe** » et le symbole "/" signifie « tel que ».

R 3 – Le symbole "$\exists!$" (non présent ici) signifierait « **il existe un unique** ».

R 4 – Attention, l'ordre des symboles mathématiques a une importance : la phrase

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R} \ / \ u_n \leqslant M$$

est toujours vraie, et ne signifie absolument pas qu'une suite est majorée.

Exemples :

E 1 –

3 Le raisonnement par récurrence

Proposition 5 ***Principe de récurrence (simple)***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**initialisation**)*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$ fixé, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également (**hérédité**)*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)\ :$ "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".

- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :
  On a par définition $u_0 = 0$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
  On sait que $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$. Puisqu'on a supposé que $u_n \geqslant 0$, alors u_{n+1} est le quotient de deux nombres positifs, donc est encore positif. De plus, on sait que $u_n + 1 \leqslant u_n + 2$, donc $\dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \leqslant 1$. On a donc bien que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 6 ***Principe de récurrence double***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également.*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n + 3^n$.

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)\ :$ "$u_n = 2^n + 3^n$.".

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$, et $2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 5$, et $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
  On a supposé que $u_n = 2^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Alors :
  $$u_{n+2} = 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) = 2^n\left(2 \times 5 - 6\right) + 3^n\left(3 \times 5 - 6\right) = 2^n \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$
  La propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
- Par récurrence double, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 7 ***Principe de récurrence forte (ou généralisée)***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition mathématique dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$,*

$$\text{si } \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n) \text{ sont vraies, alors } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie également}$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a u_n existe et $u_n \geqslant 0$.

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 0$".

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ soient vraies. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
  On a supposé qu'on avait défini les nombres $u_0, u_1, \ldots, u_n$ et que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$, $\ldots$, $u_n \geqslant 0$.
  Alors $u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geqslant 0$, on peut donc bien définir $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$ et comme une racine carrée est toujours positive, on a bien $u_{n+1} \geqslant 0$.
  La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Par récurrence forte, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

4 Suites usuelles

4.1 Suites arithmétiques

Définition 8 **Par récurrence**

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de réels est dite **arithmétique** de raison r si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$

Proposition 9 ***Formule explicite***

Soit $r \in \mathbb{R}$, et soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr}$$

Remarque :

Si la suite est définie à partir du rang k, on a : $\forall n \geqslant k,\ u_n = u_k + (n-k)r$.

Proposition 10 ***Monotonie***

Soit $r \in \mathbb{R}$, et soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r. On a alors :

— $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est croissante si et seulement si* $r \geqslant 0$.
— $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est décroissante si et seulement si* $r \leqslant 0$.

Exemple :

4.2 Suites géométriques

Définition 11 **Par récurrence**

Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels est dite **géométrique** de raison q si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$

Proposition 12 ***Formule explicite***

Soit $q \in \mathbb{R}$, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q. On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0}$$

Remarque :

Si la suite est définie à partir du rang k, on a : $\forall n \geqslant k,\ u_n = q^{n-k}u_k$.

Proposition 13 ***Monotonie***

Soit $q \in \mathbb{R}$, et et pour tout entier n, $u_n = q^n$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc la suite géométrique de raison q et de premier terme $1 > 0$. On a alors :

- *$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante si et seulement si $q > 1$.*
- *$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante si et seulement si $0 < q < 1$.*
- *$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est constante si et seulement si $q = 0$ ou $q = 1$.*
- *$(u_n)_{n\geqslant 0}$ n' est pas monotone si et seulement si $q < 0$.*

Exemple :

4.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 14 **Par récurrence**

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Proposition 15 ***Formule explicite***

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \qquad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Soit ℓ le (seul) réel vérifiant $\ell = a\ell + b$, autrement dit : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Alors, la suite $(u_n - \ell)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison a. On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)}$.

Exemple :

Déterminer la formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

Remarque :

L'étude d'une suite arithmético-géométrique passe par l'étude d'une suite géométrique.

5 Sommes et produits

Définition 16 **Notations Sigma et Pi**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ des réels indexés par des entiers consécutifs.
La somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ et le produit $P = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ se notent mathématiquement :

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{n} u_k} \quad \text{et} \quad \boxed{P = \prod_{k=0}^{n} u_k}$$

Remarques :

R 1 – La lettre k qui indexe la somme (ou le produit) est muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre qui n'est pas déjà utilisée. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{j=0}^{n} u_j$$

R 2 – Dans l'indexation des termes, les indices sont toujours une suite consécutifs d'entiers dans l'ordre strictement croissant. Par exemple :

$$\sum_{k=4}^{6} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}, \qquad \prod_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 4^2$$

R 3 – Par défaut, si l'ordre des bornes est dans le mauvais sens, la somme (ou le produit) est vide.
Par convention, une somme vide vaut 0, un produit vide vaut 1.

R 4 – Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ (ou dans le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$), il y a $n+1$ termes.

Plus généralement, dans la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k$ (ou dans le produit $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k$), il y a $n-p+1$ termes.

R 5 – **Relations de Chasles**.
On peut séparer une somme (ou un produit) en deux parties si elle contient au moins deux termes.
Soit $n \geqslant 1$ et soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k=0}^{n} a_k = \left(\prod_{k=0}^{p} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right)}$$

On peut ajouter des termes supplémentaires à une somme si on les retranche également.
On peut multiplier un produit par des termes supplémentaires <u>non nuls</u> si on le divise également.

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k=p}^{n} a_k = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} a_k}}$$

Proposition 17 ***Propriétés des sommes et produits***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n$ des réels. Alors

- $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k} \qquad \boxed{\prod_{k=0}^{n}(u_k v_k) = \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=0}^{n} v_k\right)}$$
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k} \qquad \boxed{\prod_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k}$$

Remarques :

R 1 – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \qquad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

Plus généralement, dans la somme $\sum_{k=p}^{n} 1$, on compte simplement le nombre de termes de la somme (ici n-p+1).

R 2 – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos, ce sont des **sommes télescopiques** . C'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme $v_k - v_{k+1}$ (ou $v_{k+1} - v_k$) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0}$$

R 3 – De même, certains produits peuvent se simplifier en dominos, ce sont des **produits télescopiques** . C'est le cas lorsque le terme dans le produit est de la forme $\frac{v_k}{v_{k+1}}$ (ou $\frac{v_{k+1}}{v_k}$) :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{v_k}{v_{k+1}}\right) = \frac{v_0}{v_{n+1}}} \qquad \boxed{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \frac{v_{n+1}}{v_0}}$$

Remarque :

Lorsqu'on a une somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$, on peut réaliser pour convenance deux types de **changements d'indice** :

- un changement par décalage d'indice : on pose $\ell = k + j \iff k = \ell - j$ où k est un entier fixé.
- un changement où on inverse l'ordre d'énumération : on pose $\ell = n - k \iff k = n - \ell$.

Après un changement d'indice, le nombre de termes dans la somme doit rester inchangé !

Exemples :

E 1 – $\displaystyle\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k-1} = \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$

E 2 – $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$

6 Notation factorielle

Définition 18 — **Factorielle d'un entier naturel**

Pour tout n entier tel que $n \geqslant 1$, on définit le nombre **factorielle** n par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

et par convention, on pose : $0! = 1$

Exemples :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1 = 2, \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Proposition 19 — ***Formule de récurrence des factorielles***

Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$n! = n \times (n-1)!$$

Remarques :

R 1 – La formule précédente n'est pas vraie pour $n = 0$. On peut réécrire : $\forall n \geqslant 0,\ (n+1)! = (n+1) \times n!$

R 2 – Plus généralement, on peut réécrire un produit d'entiers consécutifs avec des factorielles.
Si p et n sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors :

$$\boxed{p \times (p+1) \times \cdots (n-1) \times n = \frac{n!}{(p-1)!}}$$

Proposition 20 — ***Produit d'entiers pairs/impairs***

Soit $n \geqslant 0$. Alors :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times n!}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}}$$

7 Coefficients binomiaux

Définition 21 **Coefficients binomiaux**

Pour tous entiers $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit le **coefficient binomial « p parmi n »**, noté $\binom{n}{p}$ par :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}}$$

Remarque :

Par convention, dès que n et p sont des entiers ne vérifiant pas $0 \leqslant p \leqslant n$ (c'est-à-dire c'est le cas dès que $n < 0$, si $p < 0$, ou si $n < p$), alors par convention, dans ces cas, on pose : $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 22 ***Propriétés des coefficients binomiaux***

- *Pour tout* $n \geqslant 0$, $\boxed{\binom{n}{0} = 1}$.
- *Pour tout* $n \geqslant 0$, $\boxed{\binom{n}{n} = 1}$
- *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\boxed{\binom{n}{1} = n}$.
- *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\boxed{\binom{n}{n-1} = n}$.
- *Pour tout* $n \geqslant 2$, $\boxed{\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}}$.
- *Pour tout* $n \geqslant 2$, $\boxed{\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}}$.
- ***Formule de symétrie.*** *Pour tous entiers* $0 \leqslant p \leqslant n$, *on a :* $\boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}}$.
- ***Formule de récurrence.*** *Pour tous entiers* $1 \leqslant p \leqslant n$, *on a :* $\boxed{p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}}$.

Théorème 23 ***Formule de Pascal***

Pour tous entiers $n \geqslant p \geqslant 1$, *on a :* $\boxed{\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}}$.

Remarque :

Cette formule nous aide à construire le **Triangle de Pascal** qui contient tous les coefficients binomiaux.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

8 Sommes classiques

Théorème 24 ***Somme des entiers, des carrés, des cubes***

Soit n un entier naturel. On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Remarque :

Ces sommes sont valables également lorsque l'indice k commmence à 1, puisque le terme pour $k=0$ est nul.

Théorème 25 ***Somme géométrique***

Soit n un entier naturel et soit q un réel différent de 1. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \qquad \text{et plus généralement :} \qquad \boxed{\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Remarque :

Si $q=1$, la formule précédente n'a pas de sens (on ne peut pas diviser par $1-q$ dans ce cas !). On peut résumer tous les cas avec une accolade : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

Théorème 26 ***Identité remarquable $a^n - b^n$***

Soient a et b deux nombres réels et n un entier strictement positif. Alors

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Remarques :

R 1 – Cette formule généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2$ que l'on connaît déjà bien :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

R 2 – La somme est symétrique en a et b. Chaque terme de la somme est le produit de $n-1$ facteurs.

Théorème 27 ***Formule du Binôme de Newton***

Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Remarques :

R 1 – La formule est symétrique en a et b. Chaque terme de la somme est le produit de n facteurs.

R 2 – Cette formule généralise l'identité remarquable $(a+b)^2$ que l'on connaît déjà bien :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

Exemples :

E 1 – Pour tout réel x quelconque, on a donc en particulier : $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

E 2 – On a plus spécifiquement (pour $x = 1$ et $x = -1$) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}$$

9 Sommes doubles

Définition 28 **Somme double**

Soit $(a_{i,j})$ une suite indexée par deux indices i et j. On appelle **somme double** toute somme du type :

$$\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=m}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=k}^{\ell} \left(\sum_{j=m}^{n} a_{i,j} \right)$$

Remarques :

R 1 – On peut aussi noter la somme précédente : $\displaystyle\sum_{\substack{k \leqslant i \leqslant \ell \\ m \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j}$ ou encore $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![k,\ell]\!] \times [\![m,n]\!]} a_{i,j}$.

R 2 – Si les bornes dans les deux sommes sont identiques, (les deux indices sont indépendants l'un de l'autre), on peut utiliser une notation plus concise, et donc intervertir les deux sommes sans se poser de questions :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

R 3 – Le deuxième indice peut dépendre du premier (mais jamais l'inverse !!). Si on veut intervertir les sommes, il faut faire attention à l'ordre des indices (le premier ne devant jamais dépendre du deuxième). Le plus simple est de transiter par la forme concise :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$