CHAPITRE 13

Étude locale d'une fonction

"Chaque résistance, chaque victoire locale est un signe, un exemple et un encouragement pour l'humanité dans sa masse." *J. Bidet*

Prerequis

— Etude de fonction (chapitres 5 et 6)
— Notion de tangente en tant que meilleure approximation affine au voisinage d'un point
— Equivalents usuels en 0
— Fonctions polynômiales (chapitre 10)

Objectifs

— Approcher localement les fonctions usuelles par des fonctions polynômiales
— Calculer une limite ou un nombre dérivé
— Etudier la position d'une courbe par rapport à une tangente ou une asymptote
— Faire des études asymptotiques

Exercices d'application

— Exercices 1, 2, 3, 5, 7, 8, du TD13

1 Développement limité en x_0

Définition 1

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point d'abscisse x_0.
On dit que f **admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** s'il existe un polynôme $g \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\boxed{f(x) = g(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)}$$

En particulier, f admet un DL d'ordre n en 0 si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

autrement dit, f s'écrit localement (au voisinage de 0) comme la somme de :

- une fonction polynômiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, appelée la **partie régulière du DL**
- une fonction négligable devant x^n : $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, appelée le **reste du DL**

Remarques :

R 1 – Ecrire un DL d'ordre n consiste à approcher localement f par une fonction polynômiale de degré inférieur à n.

R 2 – Si f est une fonction polynômiale alors elle est égale à la partie régulière de son propre DL (il n'y a aucun changement à faire).

R 3 –

$$\boxed{f \text{ admet un DL d'ordre 0 en } x_0 \iff f \text{ admet une limite finie en } x_0}$$

et dans ce cas, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(1)$$

R 4 –

$$\boxed{f \text{ admet un DL d'ordre 1 en } x_0 \iff f \text{ est dérivable en } x_0}$$

et dans ce cas, on a : $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)}$ Autrement dit, écrire un DL à l'ordre 1 consiste à dire que la courbe de f se comporte au voisinage du point d'abscisse x_0 comme une droite, qui n'est autre que la tangente à la courbe en x_0.

Théorème 2

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors il est unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \forall x \neq 1$. Alors, f admet un DL à tout ordre n en 0, qui vaut :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. En effet : $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ et $\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Théorème 3 ***Formule de Taylor-Young***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors pour tout entier n, f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, et dans ce cas pour x au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)}$$

ou autrement dit, lorsque h est au voisinage de 0 : $\boxed{f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)}$.

Remarques :

R 1 – Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$, ce qui donne que, pour x au voisinage de 0, on a : $\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}$.

R 2 – La fonction f étant ici de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, **on peut primitiver un développement limité** .
Si on sait que au voisinage de 0, on a : $f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,
alors on a au voisinage de 0 : $f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.

Théorème 4 ***DL usuels d'ordre 3 <u>AU VOISINAGE DE 0</u>***

Par Taylor-Young, on a directement que : $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\big(x^3\big)}$.

Par Taylor-Young, ou par somme géométrique, on a :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\big(x^3\big)} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o\big(x^3\big)}$$

En primitivant, on obtient :

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)}, \qquad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)}$$

Par Taylor-Young, on obtient :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o\big(x^3\big)}$$

En particulier,

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\big(x^3\big)}$$

Par Taylor-Young, on a aussi :

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\big(x^3\big)} \qquad \boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\big(x^4\big)}$$

Remarques :

R 1 – On rappelle qu'au voisinage de 0, $x^{n+1} = o(x^n)$. Ainsi, si on connaît un développement limité à un ordre grand (autrement dit à une précision assez pointue), on peut **tronquer le développement limité** à un ordre plus petit (on perd cependant en précision).

R 2 – Dans les faits, on se limitera autant que possible aux DL d'ordre 2 ou 3, mais vu que les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on pourrait deviner les termes suivants, qu'on peut obtenir en cas de besoin par la formule de Taylor-Young ou en primitivant un DL connu.
Par exemple, le DL de e^x à tout ordre est facile à deviner :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^{10})$$

R 3 – Remarquons que lorsque la fonction étudiée est paire (par ex cos), alors les puissances sont toutes paires dans le DL.
De même, lorsque la fonction étudiée est impaire (par ex sin), alors les puissances sont toutes impaires dans le DL.

R 4 – Si deux fonctions f et g admettent des développements limités du même ordre n au voisinage de 0 (quitte à en tronquer un pour obtenir la même précision), **on peut additionner les DL** :

$$\ln(1+x) - \sin(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

R 5 – Si deux fonctions f et g admettent des développements limités du même ordre n au voisinage de 0 (quitte à en tronquer un pour obtenir la même précision), **on peut multiplier les DL**, il suffit de multiplier les parties régulières en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n :

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

R 6 – Grâce à un développement limité, on peut déterminer par **identification** des nombres dérivés.

R 7 – On peut **composer les DL** dans le sens où si on connait un DL de f en 0 et que $\underline{f(0)=0}$, puis qu'on connaît un DL de g en 0, alors on peut écrire le DL de $g \circ f$ en 0.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e \times \exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e \times \left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right) \\
&= e\left(1+\frac{1}{2}x+o(x^2)\right) \\
&= e+\frac{e}{2}x+o(x^2)
\end{aligned}$$

R 8 – En particulier, quand on veut faire un **quotient de DL**, on se sert d'une composée avec le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ ou $\dfrac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2) \\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2) \\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

R 9 – Lorsqu'on fait des quotients de DL et qu'on souhaite obtenir une certaine précision à la fin (à l'ordre 2 par exemple), il faut faire attention aux éventuelles simplifications, il est parfois nécessaire de démarrer à un ordre supérieur au départ.

Par exemple pour obtenir un DL d'ordre 2 de $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{\ln(1+x)} &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-1}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} \\
&= \frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} \\
&= \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)} \\
&= \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\times\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\right) \\
&= \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{4}\right)+o(x^2) \\
&= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{6}+o(x^2) = \boxed{1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}
\end{aligned}$$

2 Application à l'étude locale

Proposition 5

Si f admet un développement limité au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + o\big(x^k\big), \qquad \textit{avec } k \geqslant 2,\ a_k \neq 0$$

dans ce cas l'équation de la tangente en 0 est $y = a_0 + a_1 x$, et l'allure du graphe au voisinage du point d'abscisse 0 dépend principalement du terme $a_k x^k$.
Si k est pair, alors la courbe est située au-dessus ou en-dessous de sa tangente en 0.
*Si k est impair, alors la courbe traverse sa tangente, on a un **point d'inflexion en** 0.*

Remarque :

En particulier, si on a par exemple avec $\alpha > 0$:

$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + \alpha x^2 + o(x^2)}$ $\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x - \alpha x^2 + o(x^2)}$

$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + \alpha x^3 + o(x^3)}$ $\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x - \alpha x^3 + o(x^3)}$

Exemple :

Étudions l'allure de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3\right) + o(x^3) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}_{\text{donne l'eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$.
Pour $x < 0$, la courbe est en-dessous de la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.

Proposition 6
Soit f admettant un réel x_0 à l'intérieur de son domaine de définition, pour lequel on a un développement limité de la forme (pour h au voisinage de 0) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)$$

- *Si f admet un minimum local en x_0, alors $a_2 \geqslant 0$.*
  Si f admet un maximum local en x_0, alors $a_2 \leqslant 0$.
- *Si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.*
  Si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.

Remarque :

Si $a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0.

3 Application à l'étude asymptotique

Définition 7
Pour une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la courbe représentative de f admet pour **asymptote oblique** la droite d'équation $y = ax + b$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - \big(ax+b\big)\Big) = 0$$

Remarque :

En particulier, si on écrit :

$$f(x) = ax + b + g(x) + o(g(x)) \qquad \text{avec } g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$, et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $g(x)$ au voisinage de l'infini.

Exemple :

Asymptote en $+\infty$ de $x \mapsto \sqrt{x^2+x-1}$ et position ?

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-1} &= x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\\ &= x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x+\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

C'est un développement asymptotique !
La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x-1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$, et la courbe est située en-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.