Les calculs

RAPPELS : REGLES DE CALCULS AVEC LES FRACTIONS

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}} \quad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}} \quad \boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

RAPPELS : REGLES DE CALCULS AVEC LES RACINES

$$\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}} \quad \boxed{(\sqrt{a})^2=a} \quad \boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$$

RAPPELS : REGLES DE CALCULS AVEC LES PUISSANCES

$$\boxed{a^{b+c}=a^b\times a^c} \quad \boxed{(ab)^c=a^c\times b^c} \quad \boxed{a^{-b}=\frac{1}{a^b}}$$

A retenir:
— Deux nombres **positifs** sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.
— On peut prendre la racine carré d'un nombre positif et le résultat est positif.
— Un produit est nul si et seulement si au moins un facteur est nul.

1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $6-1\times 2+3\times 0-6:2$
2. $(6-1)\times(2+3)\times 0-(6:2)$
3. $6-(1\times 2)+3\times((0-6):2)$
4. $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}$
5. $\frac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$
6. $(-6)(-3)-8(-2)$
7. $\frac{5}{-1}+(-1)^2(-1)^{-3}$
8. $\frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{\frac{1}{3}-2}$
9. $\frac{\frac{6}{15}+2\times\frac{3}{10}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}$
10. $\frac{\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{9}}{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{7}}$
11. $\sqrt{3^2}$
12. $\sqrt{(-3)^2}$
13. $\sqrt{(-2)(-8)}$
14. $(\sqrt{18})^3$
15. $\frac{(4\times 3)^{-6}\times 8}{9^3}$
16. $\frac{(4\times 3)^{10}+4^9}{8^4}$
17. $\left(\frac{8^{-2}}{4^{-4}}\right)^4$
18. $\frac{2^{n+1}-6\times 2^{n-1}}{2^n}$

1. 1
2. -3
3. -5
4. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{7}{5}$
6. 34
7. -6
8. $\frac{-39}{20}$
9. $\frac{-12}{5}$
10. $\frac{3409}{180}$
11. 3
12. 3
13. 4
14. $54\sqrt{2}$
15. $\frac{2}{4^5\times 3^{12}}$
16. $2^6(4\times 3^{10}+1)$
17. 4^4
18. -1

2 Développer les expressions suivantes :

1. $(x+a)^2$
2. $(x-a)^2$
3. $(x+a+b)^2$
4. $(x+a-b)^2$
5. $(2a-1)^2-(a-3)(2a+1)$
6. $(a-b\sqrt{3})^2(a+b\sqrt{3})^2$
7. $(e^x-e^{-x})^2-e^{-x}(e^{3x}+e^{-x})$
8. $(3x+2)^2-(5-2x)(3x-2)$

1. $x^2+2ax+a^2$
2. $x^2-2ax+a^2$
3. $x^2+a^2+b^2+2ax+2bx+2ab$
4. $x^2+a^2+b^2+2ax-2bx-2ab$
5. $2a^2+a+4$
6. $(a^2-3b^2)^2=a^4-6a^2b^2+9b^4$
7. $e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-e^{-2x}=-2$
8. $3x^2+x+14$

3 Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

1. $\dfrac{x^{-2}x^4}{x^{-3}}$
2. $\dfrac{(xy)^4}{x^3y^3}$
3. $(x^3)^{-2}$
4. $\dfrac{(3x)^3y^{-2}}{2x^4y^{-1}}$
5. $\dfrac{x^2-16}{x-4}$
6. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x}$

1. x^5 2. xy 3. $\dfrac{1}{x^6}$ 4. $\dfrac{27}{2xy}$ 5. $x+4$ 6. $\dfrac{x^2+x-1}{x(x-1)}$

4 Compléter les pointillés :

1. $x^2-6x-7=(x-3)^2+\cdots$
2. $3x^2-8x-\dfrac{1}{3}=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\cdots$
3. $3x^2-7x+4=\cdots(x-\cdots)^2+\cdots$
4. $ax^2+bx+c=a\left(x-\cdots\right)^2-\dfrac{\cdots}{4ac}$

1. $x^2-6x-7=(x-3)^2-16$
2. $3x^2-8x-\dfrac{1}{3}=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{17}{3}$
3. $3x^2-7x+4=3\left(x-\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{1}{12}$
4. $ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2-\dfrac{c(b^2-4ac)}{4ac}$

5 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 6x + 3 = 0$
2. $3x(1-x) = (1-2x)(x-2)$
3. $\sqrt{x+4} = 4x + 2$
4. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1$

1.
$$x^2 - 6x + 3 = 0$$
On a $\Delta = 36 - 4 \times 3 = 24 = 4 \times 6 > 0$. Il y a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$$\frac{6+2\sqrt{6}}{2} = \boxed{3+\sqrt{6}}, \qquad \text{et} \qquad \frac{6-2\sqrt{6}}{2} = \boxed{3-\sqrt{6}}$$

2.
$$3x(1-x) = (1-2x)(x-2) \iff 3x - 3x^2 = x - 2 - 2x^2 + 4x \iff x^2 + 2x - 2 = 0$$
$\Delta = 4 + 8 = 12 > 0$. Il y a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$$\frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1+\sqrt{3}}, \qquad \text{et} \qquad \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1-\sqrt{3}}$$

Remarque : lors de la résolution d'une équation du 2d degré, inutile d'écrire les formules du cours ($\Delta = b^2 - 4ac = \ldots$, $x_1 = \ldots$) : calculez directement sans écrire a, b et c. L'important est à présent de savoir résoudre rapidement de telles équations..

3.
$$\sqrt{x+4} = 4x + 2$$
Remarquons que l'équation n'a de sens que si $x+4 \geqslant 0$ et $4x+2 \geqslant 0$. On résout donc dans $[-4, +\infty[\cap [-1/2, +\infty[= [-1/2, +\infty[$.
$$\begin{aligned}\sqrt{x+4} = 4x+2 &\iff x + 4 = (4x+2)^2 \\ &\iff x + 4 = 16x^2 + 16x + 4 \\ &\iff 16x^2 + 15x = 0 \\ &\iff x(16x+15) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-15}{16}\end{aligned}$$
Ainsi, il y a a priori deux solutions qui sont 0 et $-\frac{15}{16}$, mais la deuxième n'est pas dans notre domaine de définition $[-1/2, +\infty[$. L'unique solution est donc $\boxed{0}$.

4.
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1$$
Remarquons que l'équation n'a de sens que si $x - 1 \geqslant 0$ et si $x - 2 \geqslant 0$. On résout donc dans $[2, +\infty[$.
$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1 &\iff (x-1) + (x-2) + 2\sqrt{(x-1)(x-2)} = 1 \\ &\iff 2\sqrt{(x-1)(x-2)} = 4 - 2x \\ &\iff \sqrt{(x-1)(x-2)} = 2 - x \\ &\iff (x-1)(x-2) = (2-x)^2 \\ &\iff (x-2)\left((x-1) - (x-2)\right) = 0 \\ &\iff x - 2 = 0\end{aligned}$$

Puisque 2 est bien dans notre domaine de définition, la seule solution est donc $\boxed{2}$.

6 **Pour aller un peu plus loin : manipuler les factorielles**

On définit pour tout entier n le nombre « $n!$ » défini comme le produit des n premiers entiers consécutifs, avec la convention que $0! = 1$.
On a donc :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \quad \text{lorsque } n \geqslant 1$$

Par exemple, on a $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

1. Calculer $2!$
2. Calculer $3!$
3. Calculer $5!$
4. Calculer $\dfrac{7!}{4!}$
5. Calculer $\dfrac{7!-6!}{5!}$
6. Calculer $\dfrac{4!}{2!3!}$
7. Calculer $\dfrac{6!}{2!4!}$
8. Calculer $\dfrac{2!4!8!}{(4!)^2(3!)^3}$
9. Ecrire le nombre suivant à l'aide de factorielles : $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6}$

1. 2
2. 6
3. 120
4. $7 \times 6 \times 5$
5. 36
6. 2
7. 15
8. $\dfrac{4 \times 5 \times 7}{9}$
9. $\dfrac{7!}{(2^3 3!)^2}$

Ordre et inégalités

RAPPELS : NOMBRES REMARQUABLES A CONNAITRE :
(il faut au moins retenir entre quels entiers ils sont situés)

$$\boxed{\pi \simeq 3.14} \qquad \boxed{\sqrt{2} \simeq 1.4} \qquad \boxed{e \simeq 2.7} \qquad \boxed{\ln(2) \simeq 0.7}$$

A retenir:

— On peut multiplier (ou diviser) une inégalité par un nombre strictement positif sans changer l'ordre.
— Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés car la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
— Un nombre positif et plus petit que 1 est plus grand que son propre carré.

7 Ranger dans l'ordre décroissant (SANS CALCULATRICE !) les nombres suivants :

$-\dfrac{5}{3}$, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{26}{7}$, π, $\dfrac{23}{8}$, $\dfrac{9}{-5}$.

$$\frac{9}{-5} < -\frac{5}{3} < -\sqrt{2} < \frac{23}{8} < \pi < \frac{26}{7}$$

8 Lequel des deux nombres $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ ou $\sqrt{5}+\sqrt{12}$ est le plus grand ?

$$\sqrt{6}+\sqrt{10} < \sqrt{5}+\sqrt{12}$$

En effet :

$$\sqrt{6}+\sqrt{10} < \sqrt{5}+\sqrt{12} \iff 6+2\sqrt{6\times 10}+10 < 5+2\sqrt{5\times 12}+10 \iff 16 < 17 : \text{ vrai}$$

9 Montrer que si $a < b$, alors on a :

$$a < \frac{2a+b}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{a-4b}{3} < -b$$

On suppose que $a < b$. Alors :

$$a < \frac{2a+b}{3} \iff 3a < 2a+b \iff a < b \ : \ \text{vrai}$$

et

$$\frac{a-4b}{3} < -b \iff a-4b < -3b \iff a < b \ : \ \text{vrai}$$

10 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ (donner une réponse sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles).

1. $3x+2>1$
2. $5x+2>2x-7$
3. $\dfrac{2x+1}{x+3}<3$
4. $-9x^2+24x-16<0$
5. $(x-2)(1-x)>x(5-x)$
6. $\sqrt{x-2}>x-5$
7. $\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-3}>1$

1. $$3x+2>1 \Longleftrightarrow 3x>-1 \Longleftrightarrow x>-\frac{1}{3}$$
   Ainsi l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$.
2. $$5x+2>2x-7 \Longleftrightarrow 3x>-9 \Longleftrightarrow x>-3$$
   Ainsi l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=]-3,+\infty[$.
3. $$\frac{2x+1}{x+3}<3$$
   Déjà, remarquons que cette inéquation n'a de sens que si la fraction est définie, donc on résout sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. De plus :
   $$\frac{2x+1}{x+3}<3 \Longleftrightarrow \frac{2x+1}{x+3}-3<0 \Longleftrightarrow \frac{-x-8}{x+3}<0 \Longleftrightarrow -(x+8)(x+3)<0$$
   Les racines sont -3 et -8 et le produit est du signe négatif à l'extérieur des racines, donc l'ensemble des solutions est :
   $$]-\infty,-8[\cup]-3,+\infty[$$
4. On a une inéquation du second degré, de discriminant $\Delta=(24)^2-4\times16\times9=16(36-36)=0$. Il y a une unique racine à ce polynôme, qui est $\dfrac{24}{18}=\dfrac{4}{3}$. On sait alors que le polynôme $x\mapsto -9x^2+24x-16$ est du signe de -9 (donc négatif) en dehors strictement de cette racine. L'ensemble des solutions est donc
   $$\boxed{\left]-\infty,\frac{4}{3}\right[\cup\left]\frac{4}{3},+\infty\right[}$$
5. Développons l'expression :
   $$(x-2)(1-x)>x(5-x) \Longleftrightarrow -x^2+3x-2>-x^2+5x \Longleftrightarrow 2x<-2 \Longleftrightarrow x<-1$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty,-1[}$.
6. Déjà remarquons que l'expression n'a de sens que si $x-2\geqslant 0$. On résout donc sur $[2,+\infty[$. Alors deux cas se présentent :
   — **1er cas :** $x\geq 5$, alors on a $x-5\geq 0$ et on peut faire :
   $$\sqrt{x-2}>x-5 \Longleftrightarrow x-2>(x-5)^2 \Longleftrightarrow x-2>x^2-10x+25 \Longleftrightarrow x^2-11x+27<0$$
   On a $\Delta=11^2-4\times27=121-108=13$. Le polynôme a donc deux racines distinctes, qui sont $\dfrac{11\pm\sqrt{13}}{2}$ qui valent environ 3.7 et 7.3 et le polynôme est de signe positif à l'extérieur de ces racines. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $[5,+\infty[$ est $[5,\frac{11+\sqrt{13}}{2}[$.

— **2ème cas :** $x < 5$, alors on a $x - 5 < 0$ et alors, puisqu'une racine est positive, l'inéquation $\sqrt{x-2} > x - 5$ est toujours vraie ! Ainsi, l'ensemble $[2, 5]$ fait également partie de l'ensemble des solutions.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left[2, \frac{11+\sqrt{13}}{2}\right[}$$

Attention, ici il fallait bien faire attention qu'on n'a pas toujours $A \leqslant B \not\Rightarrow A^2 \leqslant B^2$. En effet, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est croissante que sur $\mathbb{R}^+$!

7.

$$\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} > 1$$

Remarquons que l'expression n'a de sens que si $2x - 5 \geqslant 0$ et $x - 3 \geqslant 0$. Autrement dit, on doit résoudre sur $]3, +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} > 1 &\Longleftrightarrow (\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3})^2 > 1 \\
&\Longleftrightarrow (2x-5) + (x-3) - 2\sqrt{(2x-5)(x-3)} > 1 \\
&\Longleftrightarrow 3x - 9 > 2\sqrt{2x^2 - 11x + 15} \\
&\Longleftrightarrow (3x-9)^2 > 4(2x^2 - 11x + 15) \quad \text{(possible car } 3x - 9 \geqslant 0\text{)} \\
&\Longleftrightarrow 9x^2 - 54x + 81 > 8x^2 - 44x + 60 \\
&\Longleftrightarrow x^2 - 10x + 21 > 0
\end{aligned}$$

On a $\Delta = 100 - 4 \times 21 = 16$, donc il y a deux racines : $\dfrac{10 \pm 4}{2} = 7$ ou 3. Le signe du polynôme est strictement positif à l'extérieur des racines, et rappelons-nous que nous résolvons que pour $x \geqslant 3$. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{]7, +\infty[}$$

11 Soit t un nombre tel que $0 < t < 1$. Ranger dans l'ordre croissant : $\sqrt{t},\ t,\ t^2,\ t^3,\ t\sqrt{t}$.

$$t^3 < t^2 < t\sqrt{t} < t < \sqrt{t}$$

12 Montrer que pour tous réels x et y, on a :

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$$

Pour tous x et y on a :

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$$

13 **Pour aller un peu plus loin : manipuler les valeurs absolues**

On définit pour tout réel x le nombre « $|x|$ »défini comme la partie positive de x, i.e. :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geqslant 0, \qquad |x| = -x \quad \text{si } x \leqslant 0$$

Par exemple, on a $|4| = 4$, mais $|-2| = 2$.

1. Résoudre l'équation $|x| = 3$
2. Résoudre l'équation $|3x - 7| = 8$
3. Résoudre l'équation $|3x - 7| = |-2x + 1|$
4. Résoudre l'inéquation $|x - 3| \leqslant 6$
5. Résoudre l'inéquation $|3x + 1| < 2$
6. Résoudre l'inéquation $|2x - 5| \geqslant 3$

1. $|x| = 3 \iff x = 3$ ou $x = -3$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\{-3, 3\}$$

2. $|3x - 7| = 8 \iff 3x - 7 = 8$ ou $3x - 7 = -8 \iff x = 5$ ou $x = -\frac{1}{3}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$$

3.

$$|3x - 7| = |-2x + 1| \iff \left\{\begin{array}{l} 3x - 7 = -2x + 1 \\ \text{ ou} \\ 3x - 7 = 1 - 2x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ \text{ ou} \\ x = 8/5 \end{array}\right.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est : $\left\{\frac{8}{5}, 6\right\}$.

4.

$$|x - 3| \leqslant 6 \iff -6 \leqslant x - 3 \leqslant 6 \iff -3 \leqslant x \leqslant 9$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $[-3; 9]$.

5.

$$|3x + 1| < 2 \iff -2 < 3x + 1 < 2 \iff -3 < 3x < 1 \iff -1 < x < \frac{1}{3}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\left]-1; \frac{1}{3}\right[$.

6.

$$|2x - 5| \geqslant 3 \iff \left\{\begin{array}{l} 2x - 5 \geqslant 3 \\ \text{ ou} \\ 2x - 5 \leqslant -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 4 \\ \text{ ou} \\ x \leqslant 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$.

Les fonctions logarithme et exponentielle

RAPPELS DES REGLES DE CALCULS AVEC LES LOGARITHMES :

$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$ $\boxed{\ln(a^b) = b\ln(a)}$

RAPPELS DES REGLES DE CALCULS AVEC LES PUISSANCES ET LES EXPONENTIELLES :

$\boxed{a^{b+c} = a^b \times a^c}$ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}}$ $\boxed{(ab)^c = a^c \times b^c}$

$\boxed{\ln(e^a) = a}$ $\boxed{e^{\ln(a)} = a}$ $\boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$ $\boxed{\frac{1}{e^{-a}} = e^a}$

A retenir:
— Bien avoir en tête les courbes des fonctions de référence (affine, inverse, ln, exp, valeur absolue...) permet de retrouver facilement leurs variations et leurs limites.
— Pour justifier les variations d'une fonction, on pense à étudier le signe de sa dérivée.
— Avec une fonction composée, la première chose à regarder est son ensemble de définition: pour quels réels x l'expression a-t-elle un sens?

14 Simplifier les nombres suivants :

1. $e^{5\ln 2}$
2. $2\ln(4) - 3\ln(2)$
3. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
4. $\ln(8!) - \ln(7!)$
5. $2\ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln(3e^{-2})$
6. $6\ln\sqrt{2} - \ln\left(\frac{2^3}{3}\right)$
7. $\frac{e^{2x}+e^x}{e^x}$

1. $e^{5\ln 2} = e^{\ln(2^5)} = 2^5$
2. $2\ln(4) - 3\ln(2) = 4\ln(2) - 3\ln(2) = \ln(2)$
3. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = \ln(2^2 - (\sqrt{3})^2) = \ln(1) = 0$
4. $\ln(8!) - \ln(7!) = \ln(8) + \ln(7!) - \ln(7!) = \ln(8)$
5. $2\ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln(3e^{-2}) = -2\ln(9) + \ln(3) + \ln(e^{-2}) = -3\ln(3) - 2$
6. $6\ln\sqrt{2} - \ln\left(\frac{2^3}{3}\right) = 3\ln(2) - 3\ln(2) + \ln(3) = \ln(3)$
7. $\frac{e^{2x}+e^x}{e^x} = e^x + 1$

15 On suppose que $a^2+b^2=7ab$. Montrer que : $\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

On a $a^2+b^2=7ab$ mais aussi $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ donc

$$(a+b)^2-2ab=7ab \iff (a+b)^2=9ab \iff \left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab \iff 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln(ab) \iff \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$

16 Supposons que $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. Exprimer x en fonction de y.

$$y=\sqrt{1+e^{2x}} \iff y^2=1+e^{2x} \iff e^{2x}=y^2-1 \iff 2x=\ln(y^2-1) \iff \boxed{x=\frac{1}{2}\ln(y^2-1)}$$

17 Supposons que $y=\ln(e^x+1)$. Exprimer x en fonction de y.

$$y=\ln(e^x+1) \iff e^y=e^x+1 \iff e^x=e^y-1 \iff \boxed{x=\ln(e^y-1)}$$

18 Supposons que $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Exprimer x en fonction de y.

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \iff (e^{2x}+1)y=e^{2x}-1 \iff e^{2x}(1-y)=1+y \iff e^{2x}=\frac{1+y}{1-y} \iff \boxed{x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$

19 Supposons que $\ln(e^y-e^x)=y+\ln(2)-\ln(e^y+e^x)$. Exprimer y en fonction de x.

$$\begin{aligned}
\ln(e^y-e^x)=y+\ln(2)-\ln(e^y+e^x) &\iff e^y-e^x=\frac{2e^y}{e^y+e^x}\\
&\iff e^{2y}-e^{2x}=2e^y\\
&\iff (e^y)^2-2(e^y)-e^{2x}=0\\
&\iff e^y=\frac{2+\sqrt{4+e^{2x}}}{4}\\
&\iff y=\ln\left(\frac{2+\sqrt{4+e^{2x}}}{4}\right)
\end{aligned}$$

20 Supposons que $2\ln(x-2y)=\ln x+\ln y$. Calculer $\dfrac{x}{y}$.

$$2\ln(x-2y)=\ln x+\ln y \iff (x-2y)^2=xy \iff x^2+4y^2=5xy \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0 \iff \frac{x}{y}=4$$

(il faut que que $x-2y>0$)

$\boxed{\textbf{21}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$.

$$(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0 \iff \ln x = -1 \text{ ou } \ln x = 5 \iff x = e^{-1} \text{ ou } x = e^5$$

$\boxed{\textbf{22}}$ Résoudre dans $]1, +\infty[$ l'inéquation : $\ln(1+x) < 2\ln(x-1)$.

$$\ln(1+x) < 2\ln(x-1) \iff 1 + x < (x-1)^2 \iff x^2 - 3x > 0 \iff x(x-3) > 0 \iff x > 3$$

Nombres complexes (pour les S)

RAPPELS DES REGLES DE CALCULS AVEC LES NOMBRES COMPLEXES :

— L'opération de conjugaison est compatible avec les produits, les quotients, les puissances.
— On multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur pour retrouver la forme algébrique d'un quotient.
— Il est nécessaire de connaître parfaitement le cercle trigonométrique pour retrouver rapidement un argument d'un nombre complexe donné.
— Dans $\mathbb{C}$, une équation du second degré dont le discriminant est nul a deux solutions complexes conjuguées.
— On peut procéder par identification des parties réelles et des parties imaginaires pour résoudre certaines équations.

23 Déterminer (sous forme algébrique) le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (5+2i)^3$
2. $z_2 = \dfrac{1-2i}{4-3i}$
3. $z_3 = \dfrac{(1-i)(2+i)}{5-2i}$
4. $z_4 = e^{i\pi/4} - i$

1. $z_1 = (5+2i)^3 = (5+2i)(5+2i)^2 = (5+2i)(25+4i^2+20i) = (5+2i)(21+20i) = 105-40+42i+100i = \boxed{65+142i}$
2. $z_2 = \dfrac{1-2i}{4-3i} = \dfrac{(1-2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{4-6i^2-8i+3i}{16+9} = \boxed{\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i}$
3. $z_3 = \dfrac{(1-i)(2+i)}{5-2i} = \dfrac{(3-i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \dfrac{17+i}{29} = \boxed{\dfrac{17}{29} + \dfrac{1}{29}i}$
4. $z_4 = e^{i\pi/4} - i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\right)}$

24 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5$
2. $z_2 = -36$
3. $z_3 = -3i$
4. $z_4 = \sqrt{3}i$
5. $z_5 = 5-5i$
6. $z_6 = 2i - 2\sqrt{3}$
7. $z_7 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}i - 1}$
8. $z_8 = \left(\dfrac{1-3i}{i-2}\right)^{11}$

1. $z_1 = 5$: son module est 5 et un argument est 0
2. $z_2 = -36$: son module est 36 et un argument est π
3. $z_3 = -3i$: son module est 3 et un argument est $-\pi/2$
4. $z_4 = \sqrt{3}i$: son module est $\sqrt{3}$ et un argument est $\pi/2$
5. $z_5 = 5-5i$: son module est $|z_5| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}$ et on a

$$z_5 = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

donc un argument de z_5 est $-\pi/4$.

6. $z_6 = 2i - 2\sqrt{3}$: son module est $|z_6| = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$ et on a

$$z_6 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

donc un argument de z_6 est $5\pi/6$.

7. $z_7 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}i - 1}$. Regardons le numérateur et le dénominateur :
$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$\sqrt{3}i - 1 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{2\pi/3}$.
Donc $z_7 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\pi/4 + 2\pi/3)}$. Son module est donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et un argument est $5\pi/12$

8. $z_8 = \left(\dfrac{1-3i}{i-2}\right)^{11}$
On a $\dfrac{1-3i}{i-2} = \dfrac{(1-3i)(-2-i)}{5} = -1 + i = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}$. Ainsi,

$$z_7 = \left(\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\right)^{11} = \sqrt{2}^{11}e^{33i\pi/4}$$

Donc le module de z_7 est $\sqrt{2}^{11}$ et un argument est $\frac{33\pi}{4}$, donc autrement dit $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z_7.

25 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3i-7)z+1=i(3-z)$
2. $z^2=-7$
3. $z^2+z+1=0$
4. $z^2=-3-4i$

(Pour la dernière, poser $z=x+iy$ et déterminer des relations vérifiées par x et y).

1.
$$(3i-7)z+1=i(3-z)$$
C'est une équation du premier degré.
$$\begin{aligned}(3i-7)z+1=i(3-z) &\iff (3i-7+i)z=3i-1\\ &\iff (4i-7)z=3i-1\\ &\iff z=\frac{-1+3i}{-7+4i}=\frac{(-1+3i)(-7-4i)}{49+16}=\boxed{\frac{19-17i}{65}}\end{aligned}$$

2.
$$z^2=-7$$
Autrement dit, on a $z^2=7i^2$, donc il y a deux solutions : $\boxed{z=\pm i\sqrt{7}}$

3.
$$z^2+z+1=0$$
C'est une équation du second degré à coefficient réels.
On a $\Delta=1-4=-3>0$, donc il y a deux racines complexes conjuguées qui sont
$$\boxed{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}}$$

4. $z^2=-3-4i \iff (x+iy)^2=-3-4i \iff \begin{cases}x^2-y^2=-3\\ x^2+y^2=5\\ 2xy=-4\end{cases} \iff \begin{cases}x^2=1 \text{ et } y^2=4\\ \text{et } xy=-2\end{cases} \iff (x,y)=$ $(1,-2)$ ou $(x,y)=(-1,2) \iff z=1-2i$ ou $z=-1+2i$.

Un peu de logique

Pour vous familiariser avec la logique, vous pouvez lire le document annexe. Pas de panique, nous travaillerons cale tout au long de l'année.

26 Une maman dit à son fils : « Les élèves bons en maths sont de bons élèves ».
Son fils lui dit alors : « Je suis un bon élève donc je suis bon en maths ».
Que pensez-vous de l'affirmation du fils ?

En logique, si la mère dit vrai, on a donc : $\boxed{\text{Etre bon en maths} \implies \text{Etre bon élève}}$.
Rien ne dit que la réciproque soit vraie, donc le fils ne peut pas être sûr de son affirmation.

27 Les habitants d'une certaine île sont divisés en deux groupes : le groupe de ceux qui disent toujours la vérité, et le groupe de ceux qui mentent tout le temps.

1. Vous rencontrez une personne sur cette île qui vous dit : « Je mens toujours ». Est-ce un habitant de l'île ?
2. Quelle question peut-on poser à un habitant de l'île pour savoir s'il possède un crocodile ou non ?

1. Impossible.
   Si la personne disait toujours la vérité, elle ne dirait pas qu'elle ment toujours.
   Si la personne mentait toujours, elle ne dirait pas qu'elle ment toujours (sinon elle serait en train de dire la vérité !).
   Ainsi, la personne ne peut pas habiter sur l'île.
2. Il faut lui poser la question suivante :

   « Si je te demande si tu as un crocodile, vas-tu me répondre oui ?

   Si la personne dit toujours la vérité :
   - ⋆ si elle a un crocodile, elle va répondre "oui"
   - ⋆ si elle n'a pas de crocodile, elle va répondre "non"

   Si la personne ment toujours :
   - ⋆ si elle a un crocodile, si on lui demande si elle en a un elle va répondre "non" (en mentant), donc elle ne va pas répondre "oui", à la question "vas-tu me répondre oui" elle devrait donc dire normalement "non", mais comme elle ment, elle dit "oui".
   - ⋆ si elle n'a pas de crocodile, si on lui demande si elle en a un elle va répondre "oui" (en mentant), à la question "vas-tu me répondre oui" elle devrait donc dire normalement "oui", mais comme elle ment, elle dit "non".

   Dans tous les cas, si la personne possède un crocodile elle va répondre "oui", si elle n'a pas de crocodile, elle va répondre "non".

28 Une vitre a été brisée par l'un des cinq frères d'une famille. Lorsqu'on les interroge, voici ce que chacun répond :
– John : « C'est soit Henry, soit Thomas, »
– Henry : « Ni Ernest, ni moi n'avons brisé la vitre »
– Thomas : « Henry et John mentent, »
– David : « Non, deux de mes frères parmi John, Henry et Thomas mentent et l'autre dit vrai, »
– Ernest : « Non, David, ce que tu dis n'est pas vrai. »
On décide d'appeler leur père, un homme honnête, qui ajoute que deux de ses fils mentent toujours et que les trois autres sont honnêtes. Qui a brisé la vitre ?

C'est Thomas qui a cassé la vitre, et les menteurs sont Thomas et David.

29 Une organisation comporte un patron, un adjoint, un caissier, un porte-parole, un avocat conseil et un sténographe. Les noms des employés sont : M. A, M. B, Mlle C, Mme D, Mlle E et M. F. Identifiez le caissier sachant que :
– l'adjoint est le petit-fils du patron,
– le caissier est le gendre du sténographe,
– le porte-parole est la demi-sœur de Mlle C.
– M. A est célibataire,
– M. B a 25 ans,
– M. F est le voisin du patron.

Etant donné les âges et les situations maritales, on sait que le patron est Mme D, le porte-parole est Mlle E, l'avocat est Mlle C, le sténographe est M. F, le caissier est M. B et l'adjoint est M. A.

30 Reformulez les implications suivantes sous la forme « Si ... alors... »

1. Toute fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$.
2. La somme deux entiers impairs est un nombre entier pair.
3. Je me fâche dès que je lis une bêtise.
4. Le carré d'un nombre réel est positif.
5. Je prends mon parapluie chaque fois qu'il pleut.
6. Le produit de deux nombres négatifs est positif.
7. Faire des maths me suffit pour être heureux.
8. Toute suite croissante et majorée est convergente.
9. Je progresserai pourvu que je travaille régulièrement.
10. La dérivée d'une fonction dérivable et croissante est positive.
11. Il est nécessaire de posséder un permis pour conduire.
12. La fonction f s'annule en $x = 0$.
13. La fonction f ne peut s'annuler qu'en $x = 0$.
14. Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

1. Si une fonction est dérivable sur un intervalle $[a, b]$, alors cette fonction est également continue sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Si deux entiers sont impairs, alors leur somme est un nombre entier pair.
3. Si je lis une bêtise, alors je me fâche.
4. Si un nombre x est le carré d'un nombre réel, alors x est positif.
5. S'il pleut, alors je prends mon parapluie.
6. Si deux nombres sont négatifs, alors leur produit est positif.
7. Si je fais des maths, alors je suis heureux.
8. Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
9. Si je travaille régulièrement, alors je progresserai.
10. Si une fonction est dérivable et croissante, alors sa dérivée est positive.
11. Si je conduis, alors nécessairement je possède un permis de conduire.
12. Si $x = 0$, alors $f(x) = 0$.
13. Si $f(x) = 0$, alors $x = 0$.
14. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.